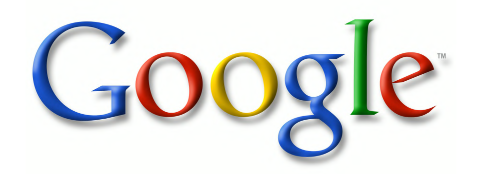
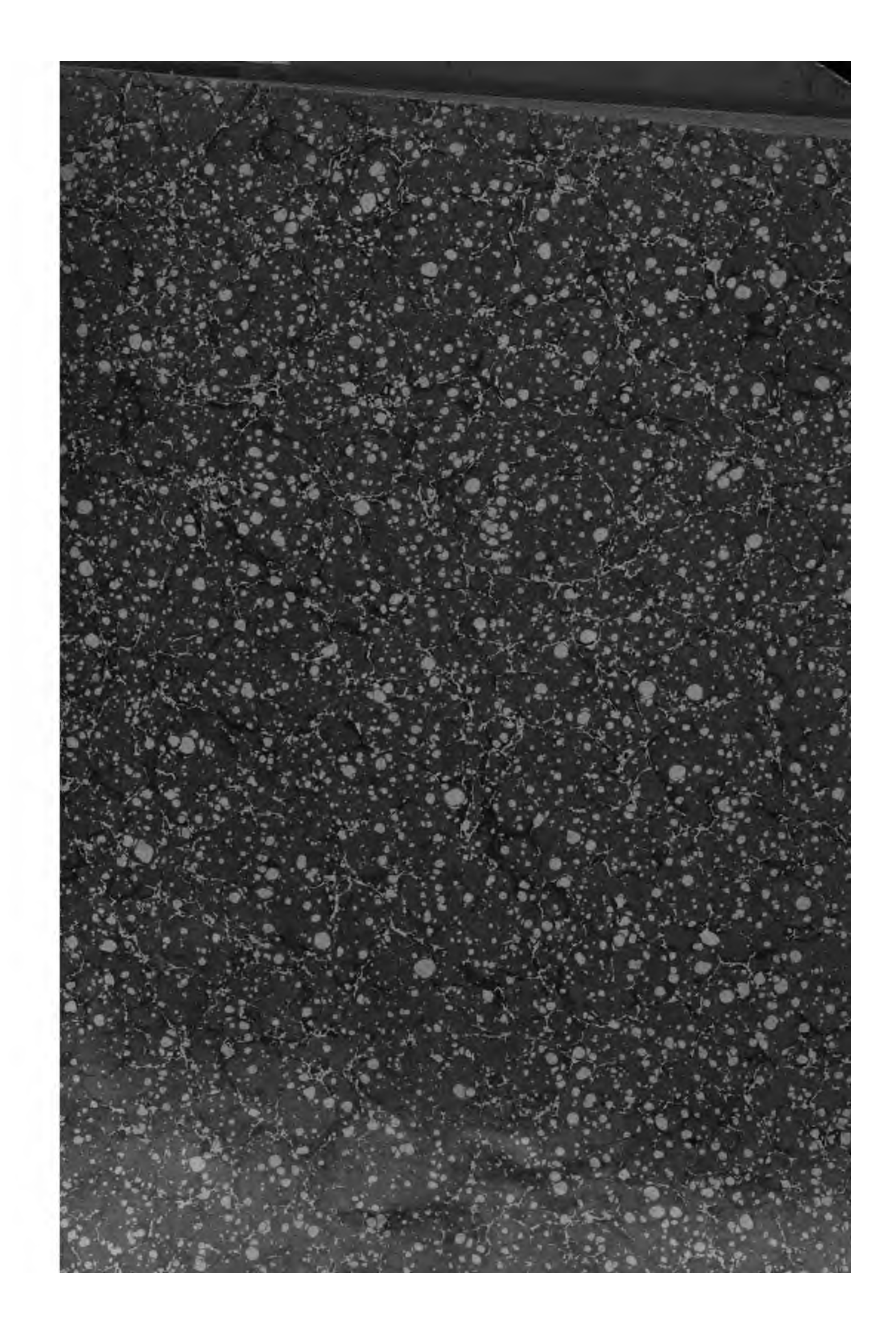
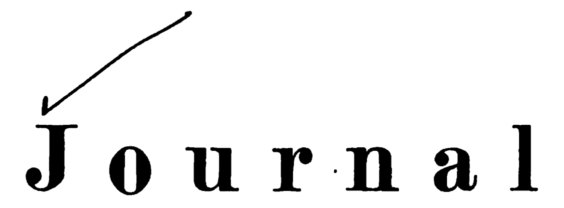
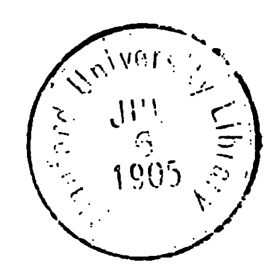



Stanford University Libraries
3 6105 000 994 157









Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

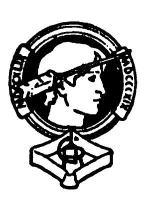
K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 130.

Heft I.

Ausgegeben den 9. Juni.



Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1905.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 130.

In vier Heften.



Berlin,

W. 35, Lützowstraße 107/8.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1905.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 130.

Spezielle Thetafunktionen von vier Veränderlichen.

Von Herrn *Heinrich Jung* in Marburg a. d. L.

In einer Arbeit im 126. Bande dieses Journals*) habe ich spezielle, nicht *Riemann*sche Thetafunktionen behandelt. Es soll nun im folgenden der besondere Fall der Theta von vier Veränderlichen genauer untersucht werden und vor allem sollen die in den dort angegebenen Formeln auftretenden Konstanten bestimmt werden.

Es handelt sich im wesentlichen, wie wir sehen werden, um die Bestimmung von viermal je sechzehn Konstanten. Die Darstellung dieser sechzehn Konstanten ist ganz analog der Darstellung der sechzehn Konstanten, die bei den Thetafunktionen von zwei Veränderlichen auftreten, und ist vielleicht nicht ohne Interesse.

Die Nullwerte der geraden Theta hängen in dem hier behandelten Falle von 9 Parametern ab, während sie im allgemeinsten Falle von 10 Parametern abhängen. Der hier behandelte Fall ist also von derselben Allgemeinheit wie der *Riemann*sche Fall. Er muß durch *eine* Gleichung zwischen den Nullwerten charakterisiert sein. Es handelt sich dann noch um die Aufstellung dieser Gleichung. Ferner sind die vier Argumente der hier betrachteten Funktionen nicht willkürlich veränderlich, da ja für sie Integrale erster Gattung gesetzt sind. Es werden also zwischen den Funktionen Gleichungen bestehen, die im allgemeinen nicht bestehen. Diese Gleichungen lassen sich leicht aufstellen (§ 8). Von dieser Be-

*) Über Thetafunktionen, die nicht zur *Riemann*schen Klasse gehören. Ich zitiere diese Arbeit im folgenden mit Th. I.

schränkung kann man sich übrigens mit Hilfe des Additionstheorems frei machen.

Ich benutze im folgenden öfter meine Arbeit: Ein Satz über Thetafunktionen, in diesem Journal Bd. 128, die ich mit Th. II zitiere.

§ 1.

In betreff der Bezeichnungen verweise ich auf Th. I. Die dort vorkommende Zahl σ ist hier gleich 4 zu setzen. Wir haben zunächst zu einem Körper vom Range zwei

$$K(p, \sqrt{(p-e_1)\dots(p-e_6)}) = K(p, q)$$

die Quadratwurzel aus einer rationalen Funktion $H(p, q)$ zu adjungieren. Die Funktion H wird in unserem Falle, von der Ordnung 10 an der Stelle π_0 unendlich, und an den Stellen ϱ_1, ϱ_2 von der zweiten Ordnung, an den Stellen $\pi_1, \dots \pi_6$ von der ersten Ordnung Null. Den so erhaltenen algebraischen Körper bezeichnen wir mit $K(\sqrt{H}) = K(z)$.

Die zu dem Körper $K(p, q)$ gehörenden Normalintegrale bezeichnen wir mit $t^{(1)}$ und $t^{(2)}$. Ihre untere Grenze sei π_0. Die zu $K(p, q)$ gehörenden Thetafunktionen bezeichnen wir mit $\vartheta(v|T)$ oder einfacher mit ϑ. Die Theta, die aus diesen dadurch hervorgehen, daß man die Perioden T mit zwei multipliziert, bezeichnen wir mit ψ. Wir nehmen in die Bezeichnung dieser Funktionen durchweg nur ein Argument auf.

Die Thetafunktionen von vier Veränderlichen, die wir hier darstellen wollen, bezeichnen wir mit φ. Die Indizes dieser Theta wählen wir nach der Art, wie es in der Abhandlung Th. II allgemein geschehen ist. Wir denken uns jede Charakteristik

$$\begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \end{pmatrix}$$

aus den beiden Charakteristiken

$$k_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 \, \mu_2 \\ \nu_1 \, \nu_2 \end{pmatrix}, \quad k_2 = \begin{pmatrix} \mu_3, \mu_4 \\ \nu_3, \nu_4 \end{pmatrix}$$

zusammengesetzt, also aus zwei Charakteristiken von Thetafunktionen zweier Veränderlichen. Wir nennen k_1 den ersten und k_2 den zweiten Teil der Charakteristik.

Die Charakteristiken k_2 bezeichnen wir nun so. Wir geben den 6 ungeraden die Indizes $1, 2, \ldots 6$ und den 10 geraden die Indizes $123, 124, \ldots 456$, wobei wir festsetzen, daß zwei Kombinationen zu je drei Ziffern, die zusammen alle sechs Ziffern enthalten, dieselbe Charakteristik bezeichnen sollen.

Die Charakteristiken k_1, die gleichzeitig Charakteristiken der hier vorkommenden Theta zweier Veränderlichen sind, bezeichnen wir wie in Th. I., S. 10. Wir setzen also

$$\omega_0 = \pi_0 = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \quad \omega_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0\,\frac{1}{2} \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \quad \pi_1 = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ \frac{1}{2}\,0 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und noch zur Abkürzung $\omega_1 \omega_2 = \omega_3$, $\pi_1 \pi_2 = \pi_3$. Aus diesen lassen sich alle anderen in der Form $\omega_\alpha \pi_\beta$ zusammensetzen.

Ist nun a_1 das Zeichen für eine Charakteristik der ersten und a_2 das für eine der zweiten Art, so bezeichnen wir die aus beiden zusammengesetzte mit $a_1 a_2$. Den Thetafunktionen geben wir den Index der zugehörigen Charakteristik. Danach haben wir für unsere Funktionen φ von vier Veränderlichen folgende Tabelle, in der der Einfachheit wegen nur die Indizes hingeschrieben sind.

I. Die zur Periode 0 gehörenden Funktionen.

a) Die ungeraden Funktionen:

$$\pi_\alpha 1,\ \pi_\alpha 2, \ldots \pi_\alpha 6. \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

b) Die geraden Funktionen:

$$\pi_\alpha 123,\ \pi_\alpha 124, \ldots \pi_\alpha 156. \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

II. Die zur Periode ω_1 gehörenden Funktionen.

a) Die ungeraden Funktionen:

$$\pi_\alpha \omega_1 1,\ \pi_\alpha \omega_1 2, \ldots \pi_\alpha \omega_1 6; \qquad (\alpha = 0, 2)$$

$$\pi_\alpha \omega_1 123,\ \pi_\alpha \omega_1 124, \ldots \pi_\alpha \omega_1 156. \qquad (\alpha = 1, 3)$$

b) Die geraden Funktionen:

$$\pi_\alpha \omega_1 1,\ \pi_\alpha \omega_1 2, \ldots \pi_\alpha \omega_1 6; \qquad (\alpha = 1, 3)$$

$$\pi_\alpha \omega_1 123,\ \pi_\alpha \omega\ 124, \ldots \pi_\alpha \omega_1 156. \qquad (\alpha = 0, 2)$$

Für die zu den Perioden ω_2 und ω_3 gehörenden Funktionen ist es analog wie bei den zur Periode ω_1 gehörenden.

§ 2.

Wir betrachten zunächst die zur Periode Null gehörenden Funktionen φ.

Ist ϑ irgend eine der zum Körper $K(p, q)$ gehörenden ungeraden Thetafunktionen, so ist bei geeigneter Wahl von α (siehe auch Th. I. § 9.)

$$(1.)\qquad L(t-t') = \frac{a\,\vartheta(t-t')}{\sqrt{p-e_\alpha}\,\sqrt{p'-e_\alpha}},$$

eine Funktion, die nur an einer Stelle im Körper $K(p, q)$ Null wird. Dabei können und wollen wir die Konstante a so gewählt annehmen, daß L unabhängig ist von der Wahl der ungeraden Funktion ϑ.

Wir bezeichnen ferner den Wert, den die Integrale erster Gattung $t^{(1)}, t^{(2)}$ in den Nullstellen π_a der Funktion H annehmen, mit $t_a^{(1)}, t_a^{(2)}$ und die Werte, die sie an den Nullstellen ϱ_1 und ϱ_2 annehmen, mit $r_1^{(1)}, r_1^{(2)}$ und $r_2^{(1)}, r_2^{(2)}$. Weiter setzen wir zur Abkürzung

$$(2.)\qquad t_1^{(i)} + t_2^{(i)} + t_3^{(i)} + t_4^{(i)} + t_5^{(i)} + t_6^{(i)} = 2s^{(i)}. \qquad (i=1,2)$$

Um nun die ungeraden Funktionen zu bekommen,*) haben wir aus dem Produkte

$$(3.)\qquad S(t) = \prod_{a=1}^{6} L(t-t_a)$$

$\sigma-3$, d. h. $4-3=1$ Faktor herauszunehmen, etwa den Faktor $L(t-t_a)$. Dann haben wir z. B.

$$\varphi_{\pi_0 n} = C\cdot E\sqrt{L(t-t_a)}\,\sqrt{L(t'-t_a)}\,\psi_{\pi_0}(t+t'+s_a),$$

und darin ist (Th. I, Seite 18, Zeile 2)

$$s_a^{(i)} = t_a^{(i)} + r_1^{(i)} + r_2^{(i)}, \qquad (i=1,2)$$

oder da

$$2r_1^{(i)} + 2r_2^{(i)} + t_1^{(i)} + t_2^{(i)} + t_3^{(i)} + \cdots + t_6^{(i)} = 0, \qquad (i=1,2)$$

$$(4.)\qquad s_a^{(i)} = t_a^{(i)} - s^{(i)}. \qquad (i=1,2)$$

Die Bezeichnung wird am übersichtlichsten werden, wenn wir in der betrachteten Funktion $\varphi_{\pi_0 n}$ den Index n gleich a nehmen. Dann haben wir

*) Th. I, Seite 44, Formel Ia, und § 19.

für die ungeraden Funktionen die Darstellung

$$(\mathrm{I}^a.)\qquad \varphi_{\pi_\lambda a} = C_a \cdot E\sqrt{L(t-t_a)}\sqrt{L(t'-t_a)}\,\psi_{\pi_\lambda}(t+t'+s_a). \quad (\lambda=0,\dots 3;\ a=1,\dots 6)$$

Hierin ist der Faktor C_a nur von α, aber nicht von λ abhängig.

Um die geraden zur Periode 0 gehörenden Funktionen zu bekommen,*) haben wir aus dem Produkte

$$S(t) = \prod_{a=1}^{6} L(t-t_a)$$

$\sigma - 1 = 3$ Faktoren auszuwählen, etwa $L(t-t_a)$, $L(t-t_\beta)$, $L(t-t_\gamma)$ und zu einem Produkte $P(t)$ zu vereinigen. Ferner haben wir das konjugierte Produkt, das mit $P(t)$ zusammen $S(t)$ ergibt, zu bilden. Dies bezeichnen wir mit $P_1(t)$. Zur Vereinfachung wollen wir folgende Bezeichnung festsetzen. Die 6 Indizes $1, \dots 6$ wollen wir auch mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ bezeichnen. Ferner wollen wir setzen

$$(5.)\qquad L(t-t_a) = L_a, \quad L(t'-t_a) = L'_a$$

und

$$(5^a.)\qquad L_a L_\beta = L_{a\beta}, \quad L_a L_\beta L_\gamma = L_{a\beta\gamma} \text{ usw.}$$

Dann ist

$$P(t) = L_{a\beta\gamma}, \quad P_1(t) = L_{\delta\varepsilon\zeta}.$$

Setzen wir noch allgemein

$$(6.)\qquad \frac{\sqrt{L_{a\beta\gamma}\,L'_{\delta\varepsilon\zeta}}}{L(t-t')} = R_{a\beta\gamma} = R'_{\delta\varepsilon\zeta},$$

so bekommen wir z. B. (Th. I, § 18, I^b)

$$\varphi_{\pi_\lambda n} = C\Big\{R_{a\beta\gamma}\,\psi_{\pi_\lambda}(t-t'+s_{a\beta\gamma}) + R_{a\beta\gamma}\,\psi_{\pi_\lambda}(t'-t+s_{a\beta\gamma})\Big\}E.$$

Hierin ist C eine von λ unabhängige Konstante. Wir können sie also mit $C_{a\beta\gamma}$ bezeichnen. Ferner ist

$$(7.)\qquad s^{(i)}_{a\beta\gamma} = r^{(i)}_1 + r^{(i)}_2 + t^{(i)}_a + t^{(i)}_\beta + t^{(i)}_\gamma = t^{(i)}_a + t^{(i)}_\beta + t^{(i)}_\gamma - s^{(i)} = -s^{(i)}_{\delta\varepsilon\zeta}. \quad (i=1,2)$$

Für den Index n werden wir hier $\alpha\beta\gamma$ wählen müssen oder auch $\delta\varepsilon\zeta$, da ja die Indizes $\pi_\lambda\alpha\beta\gamma$ und $\pi_\lambda\delta\varepsilon\zeta$ dieselben Funktionen bezeichnen. Daraus

*) Siehe Th. 1, § 18 und 19.

folgt auch, daß

$$C_{\alpha\beta\gamma} = C_{\delta\varepsilon\zeta}$$

zu setzen ist.

Danach haben wir für die geraden Funktionen der Periode 0 die Darstellung

$$(\mathrm{I^b.}) \quad \varphi_{\pi_\lambda \alpha\beta\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma}\Big\{R_{\alpha\beta\gamma}\psi_{\pi_\lambda}(t-t'+s_{\alpha\beta\gamma}) + R'_{\alpha\beta\gamma}\psi_{\pi_\lambda}(t'-t+s_{\alpha\beta\gamma})\Big\}E.$$
$$(\lambda = 0, \ldots 3;\ \alpha\beta\gamma = 123, 124, \ldots 156)$$

Bezeichnen wir die Nullwerte der geraden Funktionen φ_a mit c_a, so bekommen wir aus (I^b.) durch Nullsetzen der Argumente $(t=t')$

$$(\mathrm{I^c.}) \qquad c_{\pi_\lambda\alpha\beta\gamma} = 2kC_{\alpha\beta\gamma}\psi_{\pi_\lambda}(s_{\alpha\beta\gamma}),$$

wo gesetzt ist

$$(8.) \qquad k = \lim_{t=t'}\left\{\frac{\sqrt{S(t)}\,E}{L(t-t')}\right\}.$$

§ 3.

Es handelt sich nun um die Bestimmung der im vorigen Paragraphen eingeführten 16 Konstanten

$$C_1, \ldots C_6,\ C_{123}, \ldots C_{156}.$$

Dazu benutzen wir die in der Arbeit Th. II abgeleiteten Gleichungen (Th. II, § 4). Wir haben zu bilden, wenn μ irgend einen der 16 Indizes $1, 2, \ldots 6,\ 123, \ldots 156$ bezeichnet,

$$(1.) \qquad A_\mu = \sum_{a=0}^{3}(\pi_a)\varphi_{\pi_a\mu}\varphi_{\pi_a\pi_\lambda\mu}.$$

Hierin bedeutet (π_a) ein Vorzeichen, das der Bedingung genügen soll

$$(2.) \qquad (\pi_a\pi_\beta) = (\pi_a)(\pi_\beta).$$

Es können also etwa die Vorzeichen (π_1) und (π_2) willkürlich gewählt werden. Dann ist (π_3) gleich $(\pi_1)(\pi_2)$. Das Zeichen (π_0) ist gleich $(\pi_a)(\pi_a)$, also immer gleich $+1$. Da λ irgend einen der Werte $0, \ldots 3$ haben darf, so bekommen wir bei feststehendem μ im ganzen $2^2\cdot 4 = 16$ Größen A_μ. Von diesen sind aber 6 identisch Null, so daß noch 10 bleiben. Geben wir μ alle möglichen Werte, so bekommen wir 10 Reihen von je 16 Funktionen

A_μ und nach Th. II bestehen zwischen den Funktionen einer Reihe dieselben linearen Gleichungen wie zwischen den Quadraten der Theta zweier Veränderlichen.

Wir bilden nun zunächst die Größen A_μ einer Reihe in unserem Falle. Erstens eine der Größen $A_1, \ldots A_6$, etwa A_1. Es wird

$$A_1 = C_1^2 E^2 L_1 L_1' \sum_{\alpha=0}^{3} (\pi_\alpha) \psi_{\pi_\alpha}(t+t'-s_1) \psi_{\pi_\alpha \pi_\lambda}(t+t'-s_1).$$

Nun ist aber nach den zwischen den Funktionen ψ und den Funktionen ϑ bestehenden Gleichungen*) die Summe

$$\sum_{\alpha=0}^{3} (\pi_\alpha) \psi_{\pi_\alpha}(v) \psi_{\pi_\alpha \pi_\lambda}(v)$$

in den 10 Fällen, wo sie nicht identisch Null ist, gleich dem Produkte aus einer der 10 geraden Funktionen ϑ und ihrem Nullwerte. Bezeichnen wir den Nullwert einfach durch ϑ, so können wir setzen

$$\sum_{\alpha=0}^{3} (\pi_\alpha) \varphi_{\pi_\alpha}(v) \varphi_{\pi_\alpha \pi_\lambda}(v) = \vartheta \vartheta(v).$$

Darin ist dann $\vartheta(v)$ irgend eine der geraden Funktionen ϑ, je nachdem wir (π_1), (π_2) und λ wählen. Danach wird

$$A_1 = C_1^2 E^2 L_1 L_1' \vartheta \vartheta(t+t'-s_1). \tag{3.}$$

Analoge Darstellungen gelten für $A_2, A_3, \ldots A_6$.

Ferner bilden wir eine der Funktionen $A_{123}, \ldots A_{156}$, etwa A_{123}. Es wird

$$\begin{aligned} A_{123} = C_{123}^2 E^2 \Big\{ & L_{123} L_{456}' \sum_{\alpha=0}^{3} (\pi_\alpha) \psi_{\pi_\alpha}(t-t'+s_{123}) \psi_{\pi_\alpha \pi_\lambda}(t-t'+s_{123}) \\ & + \sqrt{S(t)}\sqrt{S(t')} \Big[\sum_{\alpha=0}^{3} (\pi_\alpha) \psi_{\pi_\alpha}(t-t'+s_{123}) \psi_{\pi_\alpha \pi_\lambda}(t'-t+s_{123}) \\ & \qquad + \sum_{\alpha=0}^{3} (\pi_\alpha) \psi_{\pi_\alpha}(t'-t+s_{123}) \psi_{\pi_\alpha \pi_\lambda}(t-t'+s_{123}) \Big] \\ & + L_{123}' L_{456} \sum_{\alpha=0}^{3} (\pi_\alpha) \psi_{\pi_\alpha}(t'-t+s_{123}) \psi_{\pi_\alpha \pi_\lambda}(t'-t+s_{123}) \Big\}. \end{aligned}$$

Benutzen wir auch hier die schon erwähnten Gleichungen zwischen den

*) *Krause*, Transformation der hyperelliptischen Funktionen, Leipzig, § 10, Formel 2 und 3.

Funktionen ψ und ϑ, so bekommen wir

$$(4.)\quad \begin{cases} A_{123} = \dfrac{C_{123}^2 E^2}{L^2(t-t')} \Big\{ L_{123} L'_{456} \vartheta\vartheta(t-t'+s_{123}) + L'_{123} L_{456} \vartheta\vartheta(t-t'+s_{123}) \\ \qquad\qquad + 2\sqrt{S(t)\, S(t')}\, \vartheta\,(t-t')\, \vartheta\,(s_{123}) \Big\}. \end{cases}$$

Dabei ist ϑ wieder eine der geraden Funktionen ϑ; welche, das hängt von der Wahl von (π_1), (π_2) und λ ab. Analoge Darstellungen gelten für die anderen Funktionen $A_{\alpha\beta\gamma}$. Wählen wir ein spezielles ϑ, so bekommen wir die 16 Größen A_μ einer Reihe. Die 10 verschiedenen Reihen unterscheiden sich nur durch die Wahl von ϑ.

Setzen wir noch in Formel (4.) $t=t'$ und bezeichnen den Nullwert von $A_{\alpha\beta\gamma}$ mit $a_{\alpha\beta\gamma}$, so haben wir

$$(5.)\qquad a_{123} = 4k^2 C_{123}^2 \vartheta\vartheta\,(s_{123}),$$

wo k dieselbe Bedeutung hat, wie früher (§ 2, 8, S. 6). Wir werden im folgenden auf die Vorzeichen wenig Rücksicht nehmen.

§ 4.

Es besteht nun z. B. die Gleichung

$$(1.)\qquad a_{156} A_1 \pm a_{256} A_2 \pm a_{356} A_3 \pm a_{456} A_4 = 0.$$

Denken wir uns hierin die Werte eingesetzt und den Faktor E^2 fortgehoben, so bekommen wir eine Gleichung, die identisch für jeden Wert von t und t' gilt. Setzen wir t gleich t_3 und t' gleich t_4, so werden A_3 und A_4 gleich Null. Wir können dann die Gleichung (1.) nach Forthebung gemeinsamer Faktoren so schreiben

$$(2.)\quad \begin{cases} C_{156}^2 C_1^2 L\,(t_3-t_1)\, L\,(t_4-t_1)\, \vartheta\,(s_{156})\, \vartheta\,(t_3+t_4+s_1) = \\ \pm\, C_{256}^2 C_2^2 L\,(t_3-t_2)\, L\,(t_4-t_2)\, \vartheta\,(s_{256})\, \vartheta\,(t_3+t_4+s_2). \end{cases}$$

Nun ist aber*)

$$t_3+t_4+s_1 = t_3+t_4+t_1-s = s_{134} = -s_{256}.$$

Ebenso ist

$$t_3+t_4+s_2 = s_{234} = -s_{156}.$$

---

*) Eigentlich müßten wir den Größen in der folgenden Gleichung den oberen Index $i\,(=1, 2)$ geben wie in der Gleichung 2, § 2. Der Einfachheit lassen wir ihn aber hier und im folgenden fort.

Ferner wollen wir zur Abkürzung setzen

$$(3.)\qquad L(t_\alpha - t_\beta) = (\alpha|\beta)(\alpha\beta).$$

Dabei soll $(\alpha|\beta)$ ein alternierendes Vorzeichen bedeuten, also der Gleichung genügen

$$(4.)\qquad (\alpha|\beta) = -(\beta|\alpha),$$

sodaß die durch Gleichung (3.) eingeführten Größen $(\alpha\beta)$ die Eigenschaft haben

$$(5.)\qquad (\alpha\beta) = (\beta\alpha).$$

Jetzt können wir die Gleichung (2.) so schreiben

$$C_1^2 C_{156}^2 (13)(14) = \pm C_2^2 C_{256}^2 (23)(24)$$

oder

$$(6.)\qquad \frac{C_1^2 C_{156}^2}{(23)(24)(34)} = \pm \frac{C_2^2 C_{256}^2}{(13)(14)(34)}.$$

Wir setzen

$$\frac{C_{\alpha\beta\gamma}^2}{(\delta\varepsilon)(\varepsilon\zeta)(\delta\zeta)} = B_{\alpha\beta\gamma},$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ in irgend einer Reihenfolge die Ziffern von 1 bis 6 bezeichnen. Dann bekommen wir, da wir der Herleitung nach in der Formel (6.) die Ziffern 1 bis 4 irgendwie permutieren können,

$$(7.)\qquad C_1^2 B_{156} = \pm C_2^2 B_{256} = \pm C_3^2 B_{356} = \pm C_4^2 B_{456}.$$

Den gemeinsamen Wert dieser Ausdrücke bezeichnen wir mit a_{56}. Analog denken wir uns noch Größen a_{12}, a_{13}, a_{14} usw. definiert. Nun ist

$$\frac{C_3^2 B_{123}}{C_1^2 B_{123}} \cdot \frac{C_1^2 B_{134}}{C_3^2 B_{134}} = 1 = \frac{a_{12}\, a_{34}}{a_{23}\, a_{14}}.$$

Also besteht die Gleichung

$$(8.)\qquad \frac{a_{12}}{a_{14}} = \frac{a_{32}}{a_{34}}.$$

Diese Gleichung repräsentiert ein Gleichungssystem, da man in ihr die Indizes irgendwie permutieren kann und auch die Indizes 5 und 6 für irgend einen Index einsetzen kann. Wenn aber ein solches Gleichungssystem besteht, so kann man setzen

$$a_{\alpha\beta} = g_\alpha\, g_\beta. \qquad (\alpha \gtrless \beta = 1, \dots 6)$$

Setzen wir jetzt noch

$$C_\alpha'^2 = \frac{1}{B_\alpha},$$

so können wir die Gleichungen (7.) schreiben

$$B_{\alpha\beta\gamma} = g_\beta\, g_\gamma\, B_\alpha = g_\alpha\, g_\beta\, B_\gamma = g_\alpha\, g_\gamma\, B_\beta.$$

Daraus folgt, daß wir setzen können

$$B_\alpha = \nu\, g_\alpha,$$

wo ν einen von den Indizes 1 bis 6 symmetrisch abhängenden Faktor bedeutet. Dann ist z. B.

$$C_{123}'^2 = (45)\,(46)\,(56)\,\nu g_1\, g_2\, g_3, \quad C_{456}^2 = (12)\,(13)\,(23)\,\nu g_4\, g_5\, g_6.$$

Nun ist aber $C_{123}^2 = C_{456}^2$, also

$$\frac{g_1\, g_2\, g_3}{(12)\,(13)\,(23)} = \frac{g_4\, g_5\, g_6}{(45)\,(46)\,(56)}. \tag{9.}$$

Führen wir zur Abkürzung

$$(1) = (12)\,(13)(14)\,(15)\,(16)$$

ein und die analog definierten Größen (2), ... (6), so können wir die Gleichung (9.) so schreiben

$$\frac{g_1}{\sqrt{(1)}} \cdot \frac{g_2}{\sqrt{(2)}} \cdot \frac{g_3}{\sqrt{(3)}} = \frac{g_4}{\sqrt{(4)}} \cdot \frac{g_5}{\sqrt{(5)}} \cdot \frac{g_6}{\sqrt{(6)}}.$$

Da aber in dieser Gleichung die Indizes beliebig vertauschbar sind, so folgt, daß wir setzen können

$$g_\alpha = h\sqrt{(\alpha)},$$

wo h wieder einen von den Indizes symmetrisch abhängenden Faktor bedeutet. Danach haben wir z. B.

$$C_{123}'^2 = \nu h^3\,(45)\,(46)\,(56)\,\sqrt{(1)}\,\sqrt{(2)}\,\sqrt{(3)}$$

oder, wenn wir

$$(\alpha\beta)\,(\beta\gamma)(\alpha\gamma) = (\alpha\beta\gamma) \tag{10.}$$

setzen, und ferner für das Produkt aller Größen $(\alpha\beta)$ einfach Π schreiben,

$$C_{123}^2 = \nu h^3 \sqrt{\Pi}\,\sqrt{(123)(456)}.$$

Allgemein haben wir also

$$(11.)\qquad C^2_{\alpha\beta\gamma} = rh^3\sqrt{\Pi}\sqrt{(\alpha\beta\gamma)(\delta\varepsilon\zeta)} = C^2_{\delta\varepsilon\zeta}$$

und

$$(12.)\qquad C^2_\alpha = \frac{1}{rh\sqrt{(\alpha)}}.$$

Es handelt sich nun noch um die Bestimmung von r und h. Dazu benutzen wir die Gleichung

$$(13.)\qquad \pm a_{156}A_2 \pm a_{256}A_1 + a_{356}A_{456} - a_{456}A_{356} = 0.$$

Hierin wollen wir setzen $t = t_4$, $t' = t_3$. Für diese Werte wird

$$A_1 = \frac{1}{rh\sqrt{(1)}}E^2(13)(14)\vartheta\vartheta(s_{134}),$$

$$A_2 = \frac{1}{rh\sqrt{(2)}}E^2(23)(24)\vartheta\vartheta(s_{234}),$$

$$A_{356} = \frac{rh^3\sqrt{\Pi}\sqrt{(356)(124)}}{(34)^3}E^2(43)(45)(46)(31)(32)(34)\vartheta\vartheta(s_{456}),$$

$$A_{456} = \frac{rh^3\sqrt{\Pi}\sqrt{(456)(123)}}{(34)^3}E^2(34)(35)(36)(41)(42)(43)\vartheta\vartheta(s_{356}),$$

wo die Gleichungen

$$t_4 - t_3 + s_{356} = s_{456},\qquad t_3 - t_4 + s_{456} = s_{356}$$

benutzt sind.

Ferner haben wir

$$a_{156}A_2 = 4k^2E^4\vartheta^2h^2\sqrt{\Pi}\,\frac{\sqrt{(156)(234)}}{\sqrt{(2)}}(23)(24)\vartheta(s_{156})\vartheta(s_{234}).$$

Nun ist

$$s_{234} = -s_{156},\quad \text{also}\quad \vartheta(s_{234}) = \vartheta(s_{156})$$

und

$$\frac{(23)(24)}{\sqrt{(2)}} = \frac{(23)(24)}{\sqrt{(21)(23)(24)(25)(26)}} = \frac{\sqrt{(156)(234)}}{\sqrt{(12)(15)(16)(25)(26)(56)(34)}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung für den Augenblick

$$n = \sqrt{(12)(15)(16)(25)(26)(56)(34)},$$

so wird

$$a_{156}A_2 = 4k^2E^4\vartheta^2h^2\sqrt{\Pi}\cdot\frac{1}{n}(156)(234)\vartheta^2(s_{156})$$

und ebenso

$$a_{256} A_1 = 4k^2 E^4 \vartheta^2 h^2 \sqrt{\Pi} \frac{1}{n} (256)(134) \vartheta^2(s_{256}).$$

Ähnlich wird

$$a_{356} A_{456} = 4k^2 E^4 \vartheta^2 r^2 h^6 \Pi n_1 (356)(124) \vartheta^2(s_{356}),$$
$$a_{456} A_{356} = 4k^2 E^4 \vartheta^2 r^2 h^6 \Pi n_1 (456)(123) \vartheta^2(s_{456}),$$

wo gesetzt ist

$$n_1 = \frac{\sqrt{(123)(124)(356)(456)}}{(12)(56)}.$$

Setzen wir alles in die Gleichung (13.) ein, so haben wir bei Unterdrückung gemeinsamer Faktoren und da, wie man leicht findet,

$$n n_1 = \sqrt{\Pi},$$

$$(14).\quad \begin{cases} (156)(234)\,\vartheta^2(s_{156}) \pm (256)(134)\,\vartheta^2(s_{256}) \\ \qquad = \pm r^2 h^4 \Pi \{(356)(124)\,\vartheta^2(s_{356}) \pm (456)(123)\,\vartheta^2(s_{456})\}. \end{cases}$$

Nun besteht aber nach Analogie der Gleichungen zwischen den Nullwerten der Theta zweier Variabeln die Gleichung

$$a_{156}^2 \pm a_{256}^2 \pm a_{356}^2 \pm a_{456}^2 = 0,$$

oder nach Einsetzen der Werte und Unterdrückung eines Faktors

$$(15.)\quad \begin{cases} (156)(234)\,\vartheta^2(s_{156}) \pm (256)(134)\,\vartheta^2(s_{256}) \\ \qquad = \pm (356)(124)\,\vartheta^2(s_{356}) \pm (456)(123)\,\vartheta^2(s_{456}). \end{cases}$$

Nun müssen die Gleichungen (14.) und (15.) mit einander identisch sein, weil sonst Gleichungen zwischen den Größen $\vartheta(s_{\alpha\beta\gamma})$ entstehen würden, wie sie nicht bestehen können, da sie bei beliebiger Permutation der Indizes bestehen bleiben müßten, und zwar, welches gerade ϑ wir auch unter ϑ verstehen. Wir bekommen also durch Vergleichung der Koeffizienten

$$r^2 h^4 \Pi = \pm 1.$$

Wir können rechts das positive Zeichen wählen. Dann haben wir

$$\frac{1}{rh} = \frac{h}{rh^2} = h\sqrt{\Pi},$$
$$rh^3\sqrt{\Pi} = rh^2\sqrt{\Pi}\,h = h$$

und demnach nach Formel (11.) und (12.)

$$(1^d.)\qquad C_\alpha^4 = \frac{h_0^2\,\Pi_0}{(\alpha)_0},\quad C_{\alpha\beta\gamma}^4 = h_0^2\,(\alpha\beta\gamma)_0\,(\delta\varepsilon\zeta)_0.$$

Dabei ist der naturgemäß unbestimmt bleibende Faktor h mit dem Index 0 versehen, und ebenso die anderen Größen, um anzudeuten, daß sie den 16 zur Periode 0 gehörenden Konstanten zugehören.

Die Formeln (16.) zeigen deutlich die Analogie mit den 16 Konstanten, die bei den Theta zweier Variabeln auftreten. Man braucht nur unter den Größen $(\alpha\beta)$ zu verstehen $a_\alpha - a_\beta$, wo die Größen $a_1, \dots a_6$ irgend 6 Konstanten sind, um diese 16 Konstanten zu haben.

§ 5.

Wir gehen nun zu den Funktionen über, die zur Periode ω_1 gehören (Th. I, § 16, S. 37). Wie wir die Bezeichnung wählen, ist in § 1 angegeben. Wir haben zunächst Primfaktoren zu bilden. Dabei wählen wir wie in Th. I die Halbperiode $\omega_1 = 56$ und setzen

$$(1.)\qquad \begin{cases} g'_\alpha = \dfrac{\sigma_1(u-\mu_\alpha)}{\sqrt{\sigma(u+\bar u)\sigma(u-\bar u)}}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{p_5 p_6^{(\alpha)}}+\sqrt{p_6 p_5^{(\alpha)}}}, \\[2ex] g''_\alpha = \dfrac{\sigma_1(u+\mu_\alpha)}{\sqrt{\sigma(u+\bar u)\sigma(u-\bar u)}}\,\dfrac{a}{\sqrt{p_5 p_6^{(\alpha)}}-\sqrt{p_6 p_5^{(\alpha)}}}. \end{cases}\qquad (\alpha=1,\dots 6)$$

Über die Bedeutung der hier vorkommenden Größen sehe man Th. I, S. 30 u. f.

Das Produkt $g'_\alpha g''_\alpha$ ist konstant und die Konstante a kann und soll so angenommen sein, daß $g'_\alpha g''_\alpha = 1$ ist. Wir haben ferner zu bilden, wenn wieder $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ die Ziffern $1, 2, \dots 6$ in irgend einer Reihenfolge bedeuten,

$$(2.)\qquad F_1^{(\alpha)} = g'_\alpha g''_\beta g''_\gamma g''_\delta g''_\varepsilon g''_\zeta,\quad G_1^{(\alpha)} = g''_\alpha g'_\beta g'_\gamma g'_\delta g'_\varepsilon g'_\zeta,$$

$$(3.)\qquad F_1^{(\alpha\beta\gamma)} = g'_\alpha g'_\beta g'_\gamma g''_\delta g''_\varepsilon g''_\zeta,\quad G_1^{(\alpha\beta\gamma)} = g''_\alpha g''_\beta g''_\gamma g'_\delta g'_\varepsilon g'_\zeta$$

und

$$(4.)\qquad \frac{\sqrt{F_1^{(\lambda)}}}{\sigma_1(u+\bar u)\sigma_1(u-\bar u)}\sqrt{S(t)} = F_\lambda,\quad \frac{\sqrt{G_1^{(\lambda)}}}{\sigma_1(u+\bar u)\sigma_1(u-\bar u)}\sqrt{S(t)} = G_\lambda,$$
$$(\lambda = 1, 2, \dots 6, 123, 124, \dots 156)$$

wo $S(t)$ wie in § 2 das Produkt $L(t-t_1)L(t-t_2)\dots L(t-t_9)$ bedeutet. Ferner setzen wir

$$(5.)\quad \begin{cases} \frac{1}{4}(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_5+\mu_6)=\eta, \\ \eta-\frac{1}{2}\mu_\alpha=\lambda_\alpha, \quad \eta-\frac{1}{2}(\mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma)=\lambda_{\alpha\beta\gamma}=-\lambda_{\delta\varepsilon\zeta}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke haben wir in die Formeln Th. I, S. 40, II einzuführen. Führen wir $F_\alpha, G_\alpha, \lambda_\alpha$ ein, so werden wir passend für den Index n von φ setzen $\omega_1\alpha$, führen wir aber ein $F_{\alpha\beta\gamma}, G_{\alpha\beta\gamma}, \lambda_{\alpha\beta\gamma}$, so werden wir n gleich $\omega_1\pi_1\alpha\beta\gamma$ setzen. Denn dann werden in Übereinstimmung mit unseren schon gemachten Festsetzungen die Funktionen

$$\varphi_{\omega_1\pi_1\alpha}, \quad \varphi_{\omega_1\pi_3\alpha}, \quad \varphi_{\omega_1\alpha\beta\gamma}, \quad \varphi_{\omega_1\pi_3\alpha\beta\gamma}$$

gerade Funktionen und die anderen ungerade.

Danach haben wir

$$(\text{II}^a.)\quad \begin{cases} \varphi_{\omega_1\pi_\mu\alpha}=\dfrac{EK_\alpha}{\psi_{\omega_1\pi_\mu}(t-t')}\Big\{\sqrt{F_\alpha F'_\alpha}[\sigma_1(u-\lambda_\alpha)\sigma_1(u'-\lambda_\alpha) \\ \qquad\qquad -(-1)^{\frac{\mu}{2}}\sigma_3(u-\lambda_\alpha)\sigma_3(u'-\lambda_\alpha)] \\ \qquad +\sqrt{G_\alpha G'_\alpha}[\sigma_1(u+\lambda_\alpha)\sigma_1(u'+\lambda_\alpha) \\ \qquad\qquad -(-1)^{\frac{\mu}{2}}\sigma_3(u+\lambda_\alpha)\sigma_3(u'+\lambda_\alpha)]\Big\}, \\ \qquad (\mu=0,2) \end{cases}$$

$$(\text{II}^b.)\quad \begin{cases} \varphi_{\omega_1\pi_\mu\alpha}=\dfrac{EK_\alpha}{\psi_{\omega_1\pi_\mu}(t-t')}\Big\{\sqrt{F_\alpha G'_\alpha}[\sigma_1(u-\lambda_\alpha)\sigma_1(u'+\lambda_\alpha) \\ \qquad\qquad -(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\sigma_3(u-\lambda_\alpha)\sigma_3(u'+\lambda_\alpha)] \\ \qquad +\sqrt{F'_\alpha G_\alpha}[\sigma_1(u+\lambda_\alpha)\sigma_1(u'-\lambda_\alpha) \\ \qquad\qquad -(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\sigma_3(u+\lambda_\alpha)\sigma_3(u'-\lambda_\alpha)]\Big\}, \\ \qquad (\mu=1,3). \end{cases}$$

$$(\text{II}^b.)\quad \begin{cases} \varphi_{\omega_1\pi_1\pi_\mu\alpha\beta\gamma}=\dfrac{EK_{\alpha\beta\gamma}}{\psi_{\omega_1\pi_\mu}(t-t')}\Big\{\sqrt{F_{\alpha\beta\gamma}G'_{\alpha\beta\gamma}}[\sigma_1(u-\lambda_{\alpha\beta\gamma})\sigma_1(u'+\lambda_{\alpha\beta\gamma}) \\ \qquad\qquad -(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\sigma_3(u-\lambda_{\alpha\beta\gamma})\sigma_3(u'+\lambda_{\alpha\beta\gamma})] \\ \qquad +\sqrt{F'_{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma}}[\sigma_1(u+\lambda_{\alpha\beta\gamma})\sigma_1(u'-\lambda_{\alpha\beta\gamma}) \\ \qquad\qquad -(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\sigma_3(u+\lambda_{\alpha\beta\gamma})\sigma_3(u'-\lambda_{\alpha\beta\gamma})]\Big\}, \\ \qquad (\mu=1,3) \end{cases}$$

$$
(\text{II}^a.)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi_{\omega_1\pi_1\pi_\mu\alpha\beta\gamma} = \frac{EK_{\alpha\beta\gamma}}{\psi_{\omega_1\pi_\mu}(t-t')}\Big\{&\sqrt{F_{\alpha\beta\gamma}F'_{\alpha\beta\gamma}}\,[\sigma_1(u-\lambda_{\alpha\beta\gamma})\,\sigma_1(u'-\lambda_{\alpha\beta\gamma}) \\
&\qquad -(-1)^{\frac{\mu}{2}}\sigma_3(u-\lambda_{\alpha\beta\gamma})\,\sigma_3(u'-\lambda_{\alpha\beta\gamma})] \\
&+\sqrt{G_{\alpha\beta\gamma}G'_{\alpha\beta\gamma}}\,[\sigma_1(u+\lambda_{\alpha\beta\gamma})\,\sigma_1(u'+\lambda_{\alpha\beta\gamma}) \\
&\qquad -(-1)^{\frac{\mu}{2}}\sigma_3(u+\lambda_{\alpha\beta\gamma})\,\sigma_3(u'+\lambda_{\alpha\beta\gamma})]\Big\}. \\
&(\mu=0,2)
\end{aligned}\right.
$$

Hierin bedeuten die K Konstanten, die nur von ihrem Index abhängen, aber nicht von μ. Und es handelt sich nun im folgenden um die Bestimmung dieser 16 Konstanten oder ihrer Verhältnisse.

Die Nullwerte der geraden Funktionen φ_n bezeichnen wir mit c_n. Wir bekommen sie, wenn wir in den Formeln (II^b.) $t=t'$, $u=u'$ setzen. Setzen wir wieder

$$\left\{\frac{E\sqrt{S(t)}}{L(t-t')}\right\}_{t=t'}=k,$$

so bekommen wir, da $F_1^{(\alpha)}G_1^{(\alpha)}=1$ ist, z. B.

$$c_{\pi_1\omega_1\alpha}=k\left\{\frac{L(t-t')}{\psi_{\pi_1\omega_1}(t-t')}\right\}_{t=t'}2K_\alpha\frac{\sigma_1(u-\lambda)\,\sigma_1(u+\lambda)-\sigma_3(u+\lambda)\,\sigma_3(u-\lambda)}{\sigma(u+\bar{u})\,\sigma(u-\bar{u})}.$$

Nun ist aber

$$\sigma_1(u-\lambda)\,\sigma_1(u+\lambda)-\sigma_3(u+\lambda)\,\sigma_3(u-\lambda)=\frac{(\sigma_1^2u-\sigma_3^2u)\,(\sigma_1^2\lambda+\sigma_3^2\lambda)}{\sigma_3^2}$$

$$=(\sigma_1^2u-\sigma_3^2u)\frac{\sigma_2(2\lambda|2\omega)}{\sigma_2(0|2\omega)}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(6.)\qquad \left\{\frac{L(t-t')}{\psi_{\pi_1\omega_1}(t-t')}\right\}_{t=t'}\cdot\frac{\sigma_1^2u-\sigma_3^2u}{\sigma(u+\bar{u})\,\sigma(u-\bar{u})}=g,$$

so wird also

$$(\text{II}^c.)\qquad c_{\pi_1\omega_1\alpha}=2kgK_\alpha\frac{\sigma_2(2\lambda_\alpha|2\omega)}{\sigma_2(0|2\omega)}.$$

Analog wird

$$
(\text{II.}^c)\quad \left\{\begin{aligned}
c_{\pi_3\omega_1\alpha} &= 2kg_1K_\alpha\frac{\sigma_2(2\lambda_\alpha|2\omega)}{\sigma_2(0|2\omega)}, \\
c_{\omega_1\alpha\beta\gamma} &= 2kg\,K_{\alpha\beta\gamma}\frac{\sigma_2(2\lambda_{\alpha\beta\gamma}|2\omega)}{\sigma_2(0|2\omega)}, \\
c_{\pi_2\omega_1\alpha\beta\gamma} &= 2kg_1K_{\alpha\beta\gamma}\frac{\sigma_2(2\lambda_{\alpha\beta\gamma}|2\omega)}{\sigma_2(0|2\omega)}.
\end{aligned}\right.
$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$\left\{\frac{L(t-t')}{\psi_{\pi_3\omega_1}(t-t')}\right\}_{t=t'} \cdot \frac{\sigma_2^2 u+\sigma_4^2 u}{\sigma(u+\bar{u})\sigma(u-\bar{u})} = g_1. \tag{7.}$$

Die Größen g und g_1 werden Konstanten sein. Außerdem ist g gleich g_1, wie wir jetzt zeigen.

Wir bestimmen $\frac{g_1}{g}$. Es ist

$$\frac{g_1}{g} = \left\{\frac{\psi_{\pi_1\omega_1}(t-t')}{\psi_{\pi_3\omega_1}(t-t')}\right\}_{t=t'} \cdot \frac{\sigma_2^2 u+\sigma_4^2 u}{\sigma_1^2 u-\sigma_3^2 u}. \tag{8.}$$

Nun ist aber nach Th. I Seite 42, oben

$$\frac{\psi_{\pi_1\omega_1}(t-t')}{\psi_{\pi_3\omega_1}(t-t')} = \frac{1}{\alpha}\frac{\sigma_1 u\sigma_1 u'-\sigma_3 u\sigma_3 u'}{\sigma_2 u\sigma_2 u'+\sigma_4 u\sigma_4 u'}, \tag{9.}$$

wo α eine Konstante ist. Diese müssen wir nun aber näher bestimmen. Es ist nach den zwischen den Funktionen ψ und ϑ bestehenden Gleichungen*)

$$\frac{\psi_{\pi_1\omega_1}(t-t')}{\psi_{\pi_2\omega_1}(t-t')} = \frac{\vartheta_{\pi_1}\vartheta_{\pi_1\omega_1}(t-t')+\vartheta_{\pi_1\omega_2}\vartheta_{\pi_1\omega_3}(t-t')}{\vartheta_{\pi_3\omega_3}\vartheta_{\pi_3\omega_2}(t-t')-\vartheta_{\pi_3}\vartheta_{\pi_3\omega_1}(t-t')}. \tag{10.}$$

Aus (9.) und (10.) folgt

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\sigma_1 u\sigma_1 u'-\sigma_3 u\sigma_3 u'}{\sigma_2 u\sigma_2 u'+\sigma_4 u\sigma_4 u'} = \frac{\vartheta_{\pi_1}\vartheta_{\pi_1\omega_1}(t-t')+\vartheta_{\pi_1\omega_2}\vartheta_{\pi_1\omega_3}(t-t')}{\vartheta_{\pi_3\omega_3}\vartheta_{\pi_3\omega_2}(t-t')-\vartheta_{\pi_3}\vartheta_{\pi_3\omega_1}(t-t')}. \tag{11.}$$

Hierin wählen wir als obere Grenze von u und t den Wert e_1 und als obere Grenze von t' und u' den Wert e_2. Dann wird $u=0$, u' gleich der Halbperiode, die σ_1 in σ_2 überführt, also gleich $\frac{1}{2}$ (Weber a. a. O. S. 52). Ferner wird $t-t'$ gleich der Halbperiode 12. Nun haben wir aber (Th. I, § 16, S. 38) gesetzt $\pi_2=12$. Also bekommen wir aus (11.)

$$\frac{1}{\alpha}\frac{0-\sigma_3\sigma_4}{0-\sigma_4\sigma_3} = \frac{0-\vartheta_{\pi_1\omega_2}\vartheta_{\pi_3\omega_3}}{\vartheta_{\pi_3\omega_3}\vartheta_{\pi_1\omega_2}-0},$$

oder $\alpha=-1$.

Setzen wir nun in (9.) $t'=t$ und $u'=u$ und vergleichen die dann entstehende Gleichung mit (8.), so folgt

$$\frac{g_1}{g}=1, \quad g_1=g.$$

*) *Krause*, Transformation der hyperelliptischen Funktionen § 10.

Will man g genauer bestimmen, so bildet man am besten $g \cdot g_1$ und drückt alle vorkommenden Größen als algebraische Funktionen von p aus. Man findet dann, wie zu erwarten, daß g konstant ist. Wir gehen darauf nicht näher ein.

§ 6.

Wir gehen nun dazu über, die Konstanten $K_1, \dots K_{156}$ zu bestimmen. Dazu gehen wir von derselben Gleichung aus, die wir zur Bestimmung der Konstanten $C_1, \dots C_{156}$ in § 4 S. 8) benutzt haben. In dieser Gleichung denken wir uns die Argumente um die Halbperiode $\omega_1 56$ und dann um ω_1 vermehrt. So erhalten wir die Gleichungen

$$(1.) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} \pm (c_{\pi_0 i 56} c_{\pi_2 i 56} + \delta c_{\pi_1 i 56} c_{\pi_3 i 56}) (\varphi_{\pi_0 \omega_1 i 56} \varphi_{\pi_2 \omega_1 i 56} + \delta \varphi_{\pi_1 \omega_1 i 56} \varphi_{\pi_3 \omega_1 i 56}) = 0, \\ \sum_{i=1}^{4} \pm (c_{\pi_0 i 56} c_{\pi_2 i 56} + \delta c_{\pi_1 i 56} c_{\pi_3 i 56}) (\varphi_{\pi_0 \omega_1 i} \varphi_{\pi_2 \omega_1 i} + \delta \varphi_{\pi_1 \omega_1 i} \varphi_{\pi_3 \omega_1 i}) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestehen für $\delta = +1$ und für $\delta = -1$. Außerdem kann man die Indizes $1, \dots 6$ beliebig permutieren, wenn nur die Vorzeichen der einzelnen Glieder richtig gewählt werden. Wir bezeichnen die in den Gleichungen (1.) vorkommenden konstanten Faktoren

$$c_{\pi_0 \alpha\beta\gamma} c_{\pi_2 \alpha\beta\gamma} + \delta c_{\pi_1 \alpha\beta\gamma} c_{\pi_3 \alpha\beta\gamma}$$

kurz mit $r_{\alpha\beta\gamma}$. Setzen wir nun in den Gleichungen (1.) die Argumente gleich Null, so haben wir, da $\varphi_{\pi_1 \omega_1 \alpha\beta\gamma}$ und $\varphi_{\pi_0 \omega_1 \alpha}$ ungerade Funktionen sind,

$$(2.) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} r_{i56} c_{\pi_0 \omega_1 i 56} c_{\pi_2 \omega_1 i 56} = 0, \\ \sum_{i=1}^{4} r_{i56} c_{\pi_1 \omega_1 i} c_{\pi_3 \omega_1 i} = 0. \end{cases}$$

Hierin setzen wir für die Größen c ihre Werte aus II^c., S. 15 ein und bekommen nach Unterdrückung eines allen Gliedern gemeinsamen Faktors, und da

$$2\sigma_2(2u|2\omega)\,\sigma_3(2u|2\omega) = \sigma_3(0|\omega)\,\sigma_3(2u|\omega) = \sigma_3\sigma_3(2u),$$

$$(3.) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} r_{i56} K_{i56}^2 \sigma_3(2\lambda_{i56}) = 0, \\ \sum_{i=1}^{4} r_{i56} K_i^2 \sigma_3(2\lambda_i) = 0. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt aus der Gleichung (1.) noch eine andere Gleichung herleiten, indem wir die obere und untere Grenze der Integrale mit den Nullstellen π_5 und π_6 von $H = z^2$ zusammenfallen lassen und zwar so, daß g'_5 und g'_6 verschwinden, also g''_5 und g''_6 unendlich werden (§ 5). Ehe wir aber die Werte der Funktionen φ einsetzen, wollen wir sie etwas umformen, da wir allen φ gemeinsame Faktoren fortlassen oder hinzufügen können.

Zunächst lassen wir den Faktor

$$\frac{E\sqrt{S(t)}}{\sigma_1(u+\bar{u})\,\sigma_1(u-\bar{u})}$$

fort. Würden wir nun die angegebenen Werte einsetzen, so würden einige der φ unendlich. Um das zu verhindern, multiplizieren wir jedes φ mit $\sqrt[4]{g'_5(g'_6)'}$, wo $(g'_6)'$ den Wert von g'_6 für die obere Grenze bedeutet. Setzen wir dann die angegebenen Werte ein, so werden $\varphi_{\pi_1\omega_1 i}, \varphi_{\pi_3\omega_1 i}$ für $i = 1, \dots 4$ gleich Null. Um die Werte, die wir für die anderen φ einführen müssen, einfacher schreiben zu können, führen wir folgende Bezeichnungen ein. Es ist zunächst $g'_\alpha g''_\alpha = 1$, also können wir setzen (§ 5)

$$(4.)\qquad g'_\alpha = \sqrt{g'_\alpha \frac{1}{g''_\alpha}} = \sqrt{\frac{\sigma_1(u-\mu_\alpha)\sqrt{p_5 p_6^{(\alpha)}} - \sqrt{p_6 p_5^{(\alpha)}}}{\sigma_1(u+\mu_\alpha)\sqrt{p_5 p_6^{(\alpha)}} + \sqrt{p_6 p_5^{(\alpha)}}}}.$$

Lassen wir hierin die obere Grenze mit π_β zusammenfallen, so bekommen wir einen Ausdruck, der sein Zeichen ändert, wenn man α mit β vertauscht und den wir mit $(\alpha\beta)_1$ bezeichnen. Also

$$(5.)\qquad (\alpha\beta)_1 = \sqrt{\frac{\sigma_1(\mu_\beta - \mu_\alpha)\sqrt{p_5^\beta p_6^\alpha} - \sqrt{p_6^\beta p_5^\alpha}}{\sigma_1(\mu_\beta + \mu_\alpha)\sqrt{p_5^\beta p_6^\alpha} + \sqrt{p_6^\beta p_5^\alpha}}}.$$

Wenn man will, kann man sich auch noch ein alternierendes Vorzeichen hinzugefügt denken. Diese Größen $(\alpha\beta)_1$ spielen für die Größen K dieselbe Rolle wie die Größen $(\alpha\beta)_0$ für die Größen C (§ 2). Den Index 1 haben wir hinzugefügt, weil es sich um zur Periode ω_1 gehörende Größen handelt.

Bei dieser Bezeichnung wird nun für die festgesetzten Werte der Argumente z. B.

$$\varphi_{\pi_0\omega_1 1} \backsim \frac{1}{\psi_{\omega_1}(t_5 - t_6)} \sqrt[4]{\frac{(15)_1(16)_1}{(25)_1(35)_1(45)_1(26)_1(36)_1(46)_1}}$$
$$\times \{\sigma_1(\mu_5 - \lambda_1)\,\sigma_1(\mu_6 - \lambda_1) - \sigma_3(\mu_5 - \lambda_1)\,\sigma_3(\mu_6 - \lambda_1)\},$$

$$\varphi_{\pi_2\omega_1 1} \frown \frac{1}{\psi_{\pi_2\omega_1}(t_5-t_6)} \sqrt[4]{\frac{(15)_1(16)_1}{(25)_1(35)_1(45)_1(26)_1(36)_1(46)_1}}$$
$$\times \{\sigma_1(\mu_5-\lambda_1)\,\sigma_1(\mu_6-\lambda_1)+\sigma_3(\mu_5-\lambda_1)\,\sigma_3(\mu_6-\lambda_1)\},$$

wo das Zeichen $\frown$ bedeuten soll, daß die linken und die rechten Seiten einander gleich sind bis auf Faktoren, die allen in der Gleichung (1.) vorkommenden φ gemeinsam sind. Beachtet man, daß allgemein

$$\sigma_1^2(u-\lambda)\,\sigma_1^2(u'-\lambda)-\sigma_3^2(u-\lambda)\,\sigma_3^2(u'-\lambda)=-\sigma_3^2\,\sigma_3(u'-u)\,\sigma_3(u+u'-2\lambda),$$

daß ferner $\mu_5+\mu_6-2\lambda_1=2\lambda_{156}$ ((5.), S. 14), daß also

$$\sigma_1^2(\mu_5-\lambda_1)\,\sigma_1^2(\mu_6-\lambda_1)-\sigma_3^2(\mu_5-\lambda_1)\,\sigma_3^2(\mu_6-\lambda_1)=-\sigma_3^2\,\sigma_3(\mu_5-\mu_6)\,\sigma_3(2\lambda_{156}),$$

so folgt, wenn wir wieder Faktoren fortlassen, die in der Gleichung (1.) allen Gliedern gemeinsam sein würden,

$$\varphi_{\pi_0\omega_1 1}\,\varphi_{\pi_2\omega_1 1} \frown \sqrt[2]{\frac{(15)_1(16)_1}{(25)_1(35)_1(45)_1(26)_1(36)_1(46)_1}}\;\sigma_3(2\lambda_{156}).$$

Setzen wir nun noch analog wie in § 2

$$(6.)\qquad (51)_1(52)_1(53)_1(54)_1(56)_1=(5)_1,\quad (61)_1(62)_1(63)_1(64)_1(65)_1=(6)_1$$

usw., so können wir, indem wir noch den von den Indizes 1, 2, 3, 4 symmetrisch abhängenden Faktor $\sqrt{(5)_1(6)_1}$ hinzufügen, schreiben

$$\varphi_{\pi_0\omega_1 1}\,\varphi_{\pi_2\omega_1 1} \frown (15)_1(16)_1\,\sigma_3(2\lambda_{156}).$$

Analoge Gleichungen gelten für $\varphi_{\pi_0\omega_1 i}\,\varphi_{\pi_2\omega_1 i}$ $(i=2,3,4)$. Setzen wir die gefundenen Werte in (1.) ein, so haben wir

$$\sum_{i=1}^{4} r_{i56}\,K_i^2\,(i5)_1\,(i6)_1\,\sigma_3(2\lambda_{i56})=0,$$

oder, wenn wir noch mit $K_5^2 K_6^2$ multiplizieren,

$$(7.)\qquad \Sigma r_{i56}\,(i5)_1\,(i6)_1\,K_i^2\,K_5^2\,K_6^2\,\sigma_3(2\lambda_{i56})=0.$$

Vergleichen wir dies mit der Gleichung (3.), so sehen wir, daß die Größen

$$(8.)\qquad (i5)\,(i6)\,K_i^2\,K_5^2\,K_6^2 \qquad\qquad (i=1,2,3,4)$$

denselben Gleichungen wie die Größen K_{i56}^2 genügen. Die Gleichungen (3.) und (7.) repräsentieren je zwei Gleichungen, da man nach Belieben δ in

$r_{\alpha\beta\gamma}$ gleich $+1$ oder -1 wählen kann. Aber anstatt von der Gleichung (1.) auszugehen, hätten wir auch von der Gleichung

$$(9.)\quad \begin{cases} \sum_{i=1,\dots 4} \pm (c^2_{\pi_0 i56} + \delta c^2_{\pi_1 i56} + \varepsilon c^2_{\pi_2 i56} + \delta\varepsilon c^2_{\pi_3 i56}) \\ \qquad\qquad \cdot (\varphi_{\pi_0\, 56} + \delta \varphi_{\pi_1 i56} + \varepsilon \varphi_{\pi_2 i56} + \delta\varepsilon \varphi_{\pi_3 i56}) = 0 \end{cases}$$

ausgehen können, welche gilt, wenn für δ und ε nach Belieben $+1$ und -1 gesetzt wird, vorausgesetzt, daß jedesmal die Vorzeichen der einzelnen Glieder passend gewählt werden. In dieser Gleichung hätten wir dann die Argumente einmal um die halbe Periode ω_1 und dann um die halbe Periode $\omega_1 56$ vermehrt und durch analoge Umformungen wie bei den Gleichungen (1.) würde man wieder finden, daß die Größen (8.) denselben Gleichungen genügen wie die Größen K^2_{i56} $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Daraus dürfen wir aber schließen, daß wir setzen können

$$(10.)\quad f_{56} K^2_{i56} = (i5)_1 (i6)_1 K^2_i K^2_5 K^2_6, \qquad (i=1,2,3,4)$$

wo f_{56} nur von den Indizes 56 abhängt. Solcher Gleichungen folgen aber noch mehrere, da wir ja die Indizes 1, 2, 3, 4, 5, 6 irgendwie permutieren dürfen. So ist z. B.

$$(15)_1 (16)_1 K^2_1 K^2_5 K^2_6 = f_{56} K^2_{156}, \quad (13)_1 (14)_1 K^2_1 K^2_3 K^2_4 = f_{34} K^2_{134},$$
$$(25)_1 (26)_1 K^2_2 K^2_5 K^2_6 = f_{56} K^2_{256}, \quad (23)_1 (24)_1 K^2_2 K^2_3 K^2_4 = f_{34} K^2_{234}.$$

Beachtet man, daß

$$K^2_{156} = K^2_{234}, \qquad K^2_{256} = K^2_{134},$$

so folgt durch Elimination von $f_{56}, f_{34}, K^2_{156}, K^2_{256}$

$$\frac{K^4_1}{K^4_2} = \frac{(25)_1 (26)_1 (23)_1 (24)_1}{(15)_1 (16)_1 (13)_1 (14)_1},$$

oder, indem man mit $(12)_1$ erweitert,

$$\frac{K^4_1}{K^4_2} = \frac{(2)_1}{(1)_1}.$$

Daher kann man setzen

$$(11.)\quad K^4_\alpha = r \frac{\Pi(\alpha\beta)_1}{(\alpha)_1},$$

wo r ein von den Indizes symmetrisch abhängender Faktor ist und wo das über alle $(\alpha\beta)_1$ zu erstreckende Produkt $\Pi(\alpha\beta)_1$ hinzugefügt ist, um die Analogie mit den Formeln für die Konstanten C^4_α (§ 4, (I^d.)) vollkommen zu machen.

Nunmehr folgt aus den Gleichungen (10.)

$$\frac{K^2_{156}}{K^2_{256}} = \frac{(15)_1 (16)_1}{(25)_1 (26)_1} \frac{\sqrt{(2)_1}}{\sqrt{(1)_1}} = \frac{\sqrt{(15)_1 (16)_1 (56)_1 (23)_1 (24)_1 (34)_1}}{\sqrt{(25)_1 (26)_1 (56)_1 (13)_1 (14)_1 (34)_1}}.$$

Setzen wir analog wie früher

$$(\alpha\beta)_1 (\beta\gamma)_1 (\gamma\alpha)_1 = (\alpha\beta\gamma)_1,$$

so können wir also setzen

$$K^2_{156} = \varrho \sqrt{(156)_1 (234)_1},$$

oder allgemein

$$K^2_{\alpha\beta\gamma} = \varrho \sqrt{(\alpha\beta\gamma)_1 (\delta\varepsilon\zeta)_1}. \tag{12.}$$

Wir haben noch das Verhältnis $\frac{r}{\varrho}$ zu bestimmen. Dazu gehen wir von der Gleichung (1.) § 6, S. 17 aus. In ihr vermehren wir das eine Mal die Argumente um die Halbperiode $\omega_1 12$, setzen dann die Argumente gleich Null und bekommen

$$r_{156} K^2_{256} \sigma_3(2\lambda_{256}) \pm r_{256} K^2_{156} \sigma_3(2\lambda_{156}) \pm r_{356} K^2_4 \sigma_3(2\lambda_4) \pm r_{456} K^2_3 \sigma_3(2\lambda_3) = 0.$$

Das andere Mal vermehren wir die Argumente um die Halbperiode $\omega_1 34$ und setzen dann für die obere Grenze π_5 und für die untere Grenze π_6. Nach ganz analogen Umformungen wie auf Seite 18 und 19 bekommen wir dann

$$r_{156} (25)_1 (26)_1 K^2_2 \sigma_3(2\lambda_{256}) \pm r_{256} (15)_1 (16)_1 K^2_1 \sigma_3(2\lambda_{156}) \pm r_{356} \frac{(5)_1 (6)_1}{(456)_1} K^2_{456} \sigma_3(2\lambda_4)$$
$$\pm r_{456} \frac{(5)_1 (6)_1}{(356)_1} K^2_{356} \sigma_3(2\lambda_3) = 0.$$

Wären wir statt von der Gleichung (1.) von der Gleichung (10.) dieses Paragraphen ausgegangen, so hätten wir analoge Gleichungen bekommen, wo statt der Größen r andere Größen stehen würden und ebenso statt der Größen $\sigma_3(2\lambda)$. Im übrigen aber sind die Gleichungen genau so. Daraus dürfen wir schließen, daß die Größen

$$K^2_{256}, \quad K^2_{156}, \quad K^2_4, \quad K^2_3$$

den Größen

$$(25)_1 (26)_1 K^2_2, \quad (15)_1 (16)_1 K^2_1, \quad \frac{(5)_1 (6)_1}{(456)_1} K^2_{456}, \quad \frac{(5)_1 (6)_1}{(356)_1} K^2_{356}$$

der Reihe nach proportional sind.

Daraus folgt z. B.

$$\frac{K_1^2}{K_2^2} = \frac{(25)_1(26)_1}{(15)_1(16)_1}\frac{K_{156}^2}{K_{256}^2},$$

was nichts neues ist und zur Bestätigung unseres Schlusses dienen kann. Ferner aber folgt

$$\frac{K_{156}^2}{K_4^2} = \pm\frac{(15)_1(16)_1(45)_1(46)_1(56)_1^2}{(5)_1(6)_1}\frac{K_1^2}{K_{456}^2}.$$

Setzen wir hierin die Werte für K_α^2 und $K_{\alpha\beta\gamma}^2$ aus (11.) und (12.) ein, so folgt

$$\varrho^2 = \pm r^2.$$

Da wir auf die Vorzeichen ein für allemal keine Rücksicht nehmen, so können wir setzen

$$\varrho = r = h_1$$

und haben

$$(\mathrm{II^d.})\qquad \begin{cases} K_\alpha^4 = h_1^2\dfrac{\Pi(\alpha\beta)_1}{(\alpha)_1}, \\ K_{\alpha\beta\gamma}^4 = h_1^2(\alpha\beta\gamma)_1(\delta\varepsilon\zeta)_1. \end{cases}$$

Die Analogie mit den Formeln ((I^d.) § 4) für die C tritt deutlich hervor.

Es wäre nun noch das Verhältnis der beiden Konstanten h_1 und h_0 zu bestimmen. Aber da weder die Rechnung noch das Resultat einfach ist, so lasse ich diese Bestimmung fort.

§ 7.

Die zu den Perioden ω_2 und ω_3 gehörenden Funktionen werden sich ganz so darstellen lassen, wie die zur Periode ω_1 gehörenden. Wir gehen darauf nicht näher ein. Wir wollen in diesem Paragraphen die erhaltenen Resultate kurz zusammenstellen.

I. Die zur Periode Null gehörenden Funktionen.

a) Die ungeraden Funktionen.

$$\varphi_{\pi_\lambda \alpha} = C_\alpha \sqrt{L(t-t_\alpha)L(t'-t_\alpha)}\,\psi_{\pi_\alpha}(t+t'+s_\alpha). \qquad \left\{\begin{matrix}\lambda=0,\dots 3\\ \alpha=1,\dots 6\end{matrix}\right\}$$

b) Die geraden Funktionen.

Zur Abkürzung setze man

$$L(t-t_\alpha)L(t-t_\beta)L(t-t_\gamma)=L_{\alpha\beta\gamma},\quad L(t'-t_\alpha)L(t'-t_\beta)L(t'-t_\gamma)=L'_{\alpha\beta\gamma},$$

dann ist

$$\varphi_{\pi_\lambda\alpha\beta\gamma}=\frac{C_{\alpha\beta\gamma}E}{L(t-t')}\left\{\sqrt{L_{\alpha\beta\gamma}L'_{\delta\varepsilon\zeta}}\,\psi_{\pi_\lambda}(t-t'+s_{\alpha\beta\gamma})+\sqrt{L'_{\alpha\beta\gamma}L_{\delta\varepsilon\zeta}}\,\psi_{\pi_\lambda}(t'-t+s_{\alpha\beta\gamma})\right\}.$$
$$(\lambda=0,\dots 3;\ \alpha\beta\gamma=123,124,\dots 156)$$

c) Die Nullwerte der geraden Funktionen.

$$c_{\pi_\lambda\alpha\beta\gamma}=2kC_{\alpha\beta\gamma}\psi_{\pi_\lambda}(s_{\alpha\beta\gamma}),$$

wo

$$k=\left\{\frac{E\sqrt{L_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta}}}{L(t-t')}\right\}_{t=t'}.$$

d) Die Konstanten C.

Zur Abkürzung setze man

$$L(t_\alpha-t_\beta)=(\alpha\beta)_0,$$

dann ist

$$C_\alpha^4=\frac{h_0^2\,\Pi(\alpha\beta)_0}{(\alpha\beta)_0(\alpha\gamma)_0(\alpha\delta)_0(\alpha\varepsilon)_0(\alpha\zeta)_0},$$

$$C_{\alpha\beta\gamma}^4=h_0^2(\alpha\beta)_0(\alpha\gamma)_0(\beta\gamma)_0(\delta\varepsilon)_0(\delta\zeta)_0(\varepsilon\zeta)_0.$$

II. Die zur Periode ω_1 gehörenden Funktionen.

Zur Abkürzung sei

$$\sigma_1(u+\lambda)\sigma_1(u'+\lambda)-(-1)^\varepsilon\sigma_3(u+\lambda)\sigma_3(u'+\lambda)=r_\varepsilon(u,u',\lambda).\quad(\varepsilon=0,1)$$

a) Die ungeraden Funktionen.

$$\varphi_{\omega_1\pi_\mu\alpha}=\frac{EK_\alpha}{\psi_{\omega_1\pi_\mu}(t-t')}\left\{\sqrt{F_\alpha F'_\alpha}\,r_{\frac12\mu}(u,u',-\lambda_\alpha)+\sqrt{G_\alpha G'_\alpha}\,r_{\frac12\mu}(u,u',\lambda_\alpha)\right\},$$
$$(\mu=0,2;\ \alpha=1,2,\dots 6)$$

$$\varphi_{\omega_1\pi_\mu\alpha\beta\gamma}=\frac{EK_{\alpha\beta\gamma}}{\psi_{\omega_1\pi_\mu}(t-t')}\left\{\sqrt{F_{\alpha\beta\gamma}F'_{\alpha\beta\gamma}}\,r_{\frac12(\mu-1)}(u,u',-\lambda_{\alpha\beta\gamma})\right.$$
$$\left.+\sqrt{G_{\alpha\beta\gamma}G'_{\alpha\beta\gamma}}\,r_{\frac12(\mu-1)}(u,u',\lambda_{\alpha\beta\gamma})\right\}.$$
$$(\mu=1,3;\ \alpha\beta\gamma=123,124,\dots 156)$$

b) Die geraden Funktionen.

$$\varphi_{\omega_1\pi_\mu\alpha}=\frac{EK_\alpha}{\psi_{\omega_1\pi_\mu}(t-t')}\left\{\sqrt{F_\alpha G'_\alpha}\,r_{\frac12(\mu-1)}(-u,u',\lambda_\alpha)+\sqrt{G_\alpha F'_\alpha}\,r_{\frac12(\mu-1)}(-u,u',-\lambda_\alpha)\right\}.$$
$$(\mu=1,3;\ \alpha=1,2,\dots 6)$$

$$\varphi_{\omega_1 \pi_\mu \alpha\beta\gamma} = \frac{E K_{\alpha\beta\gamma}}{\psi_{\omega_1 \pi_\mu}(t_1 - t')} \Big\{ \sqrt{F_{\alpha\beta\gamma} G'_{\alpha\beta\gamma}}\, r_{\frac{1}{2}\mu}(-u, u', \lambda_{\alpha\beta\gamma})$$
$$+ \sqrt{G_{\alpha\beta\gamma} F'_{\alpha\beta\gamma}}\, r_{\frac{1}{2}\mu}(-u, u', -\lambda_{\alpha\beta\gamma}) \Big\}.$$

$(\mu = 0, 2;\ \alpha\beta\gamma = 123, 124, \ldots 156)$

c) Die Nullwerte der geraden Theta.

$$c_{\pi_1 \omega_1 \alpha} = 2kgK_\alpha \frac{\sigma_2(2\lambda_\alpha | 2\omega)}{\sigma_2(0 | 2\omega)}, \quad c_{\pi_3 \omega_1 \alpha} = 2kgK_\alpha \frac{\sigma_3(2\lambda_\alpha | 2\omega)}{\sigma_3(0 | 2\omega)},$$
$$c_{\pi_0 \omega_1 \alpha\beta\gamma} = 2kgK_{\alpha\beta\gamma} \frac{\sigma_2(2\lambda_{\alpha\beta\gamma} | 2\omega)}{\sigma_2(0 | 2\omega)}, \quad c_{\pi_2 \omega_1 \alpha\beta\gamma} = 2kgK_{\alpha\beta\gamma} \frac{\sigma_3(2\lambda_{\alpha\beta\gamma} | 2\omega)}{\sigma_3(0 | 2\omega)}.$$

Hier hat k dieselbe Bedeutung wie in (I^c.). Über die Bedeutung von g sehe man (6.) Seite 15.

d) Die Konstanten K.

Man setze

$$(\alpha\beta)_1 = \sqrt{\frac{\sigma_1(\mu_\alpha - \mu_\beta)\sqrt{p_5^{(\beta)} p_6^{(\alpha)}} + \sqrt{p_5^{(\alpha)} p_6^{(\beta)}}}{\sigma_1(\mu_\alpha + \mu_\beta)\sqrt{p_5^{(\beta)} p_6^{(\alpha)}} - \sqrt{p_5^{(\alpha)} p_6^{(\beta)}}}},$$

dann wird

$$K_\alpha^4 = h_1^2 \frac{\Pi(\alpha\beta)_1}{(\alpha\beta)_1 (\alpha\gamma)_1 (\alpha\delta)_1 (\alpha\varepsilon)_1 (\alpha\zeta)_1},$$
$$K_{\alpha\beta\gamma}^4 = h_1^2 (\alpha\beta)_1 (\alpha\gamma)_1 (\beta\gamma)_1 (\delta\varepsilon)_1 (\delta\zeta)_1 (\varepsilon\zeta)_1 = K_{\delta\varepsilon\zeta}^4.$$

Die Analogie mit der üblichen Darstellung der Theta von zwei Veränderlichen tritt besonders deutlich bei den Funktionen, die zur Periode Null gehören, hervor.

§ 8.

Es bleibt noch übrig, die Gleichung aufzustellen, durch die die Moduln der hier behandelten Theta mit einander verbunden sind, und ebenso die Gleichungen, durch die die Argumente beschränkt sind.

Wir haben hier nämlich neun Moduln, die sechs Nullstellen $\pi_1, \ldots \pi_6$ von $t^2 = \Pi(p, q)$ (§ 1) und die drei Moduln der Theta von zwei Variabeln, die bei der Darstellung benutzt sind. Da im allgemeinen Falle zehn Moduln vorhanden sind, so muß *eine* Gleichung zwischen den Nullwerten der hier behandelten Theta bestehen, die im allgemeinen nicht besteht.

Ferner haben wir für die Argumente Integrale erster Gattung gesetzt, so daß sie also nicht frei veränderlich sind.

Nun besteht zwischen den Funktionen

$$\psi_{\pi_0}(w_1, w_2),\quad \psi_{\pi_1}(w_1, w_2),\quad \psi_{\pi_2}(w_1, w_2),\quad \psi_{\pi_3}(w_1, w_2)$$

eine Gleichung der Form

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{c} \lambda_0(\psi^4_{\pi_0}+\psi^4_{\pi_1}+\psi^4_{\pi_2}+\psi^4_{\pi_3}) \\ +\lambda_1(\psi^2_{\pi_0}\psi^2_{\pi_1}+\psi^2_{\pi_2}\psi^2_{\pi_3})+\lambda_2(\psi^2_{\pi_0}\psi^2_{\pi_2}+\psi^2_{\pi_1}\psi^2_{\pi_3})+\lambda_3(\psi^2_{\pi_0}\psi^2_{\pi_3}+\psi^2_{\pi_1}\psi^2_{\pi_2}) \\ +\lambda_4(\psi_{\pi_0}\psi_{\pi_1}\psi_{\pi_2}\psi_{\pi_3})=0, \end{array}\right.$$

wo die Koeffizienten λ von den Argumenten unabhängig sind.

Aus I[a]. des vorigen Paragraphen folgt dann, daß dieselbe Gleichung zwischen den vier ungeraden Funktionen

$$\varphi_{\pi_0 a},\quad \varphi_{\pi_1 a},\quad \varphi_{\pi_2 a},\quad \varphi_{\pi_3 a} \qquad (a=1,\dots 6)$$

besteht. Diese Gleichungen, die sicher nicht identisch bestehen, beschränken die Variabilität der Argumente. Man bekommt sechs Gleichungen, die natürlich nicht von einander unabhängig sein können.

Weiter folgt aus (1.) und aus I[c]. des vorigen Paragraphen, daß je vier Größen

$$c_{\pi_0 \alpha\beta\gamma},\quad c_{\pi_1 \alpha\beta\gamma},\quad c_{\pi_2 \alpha\beta\gamma},\quad c_{\pi_3 \alpha\beta\gamma} \qquad (\alpha\beta\gamma=123,\dots 156)$$

den Gleichungen (1.) genügen. Daraus folgen 10 Gleichungen, aus denen man auf mannigfache Art die Größen λ eliminieren kann. Man erhält so Gleichungen zwischen den Nullwerten c allein. Diese Gleichungen dürfen nur eine Bedingung liefern. Es wäre aber auch möglich, daß sie identisch bestehen, was mir aber unwahrscheinlich ist. Daß die Gleichungen in der Tat nur eine Bedingung liefern, ist nicht sehr schwer zu zeigen. Aber ich will darauf hier nicht näher eingehen, da ich auf diese Gleichungen später noch einmal hoffe ausführlich zurückkommen zu können.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das *Riemann*sche Problem.

(Dritte Abhandlung.)

Von Herrn *Ludwig Schlesinger* in Klausenburg.

Vorbemerkung.

Die vorliegende Abhandlung unterscheidet sich von den beiden früher mit demselben Titel veröffentlichten Arbeiten*) namentlich dadurch, daß die Theorie der Systeme homogener linearer Differentialgleichungen als ein, wie es scheint, naturgemäßes und wichtiges Hilfsmittel herangezogen wird. Der von *Riemann***) eingeführte Begriff der Funktionssysteme einer Klasse weist, wie wir sehen werden, mit Notwendigkeit auf dieses Hilfsmittel hin, und dasselbe bewährt sich, indem es einerseits gelingt, die Invarianten einer solchen Klasse durch die Koeffizienten eines linearen Differentialsystems in sehr einfacher Weise darzustellen, und andererseits dieser letztere Umstand es ermöglicht, den Existenzbeweis für die durch das *Riemann*sche Problem***) postulierten Funktionssysteme *ganz allgemein* zu erbringen, also ohne daß es nötig wäre, den vorgeschriebenen Fundamentalsubstitutionen, die als Konvergenzbedingungen bezeichneten†) Beschränkungen aufzuerlegen. — Wir liefern diesen Existenzbeweis hier zunächst mit Hilfe der *méthode de continuité*, welche Herr *Poincaré*††) für die Lösung des Fundamentalproblems

*) Dieses Journal Bd. 123, S. 138 ff.; Bd. 124, S. 292 ff. im folgenden mit A 1 und A 2 zitiert.

**) Fragment, Werke (1892) S. 377 ff.

***) A 1, S. 160.

†) A 1, S. 147.

††) Acta Mathematica Bd. IV, S. 233 ff.

der Theorie der *Fuchs*schen Funktionen ausgebildet hat, bemerken aber, daß die Prinzipien, die wir*) für die Untersuchung der realen und der imaginären Bestandteile eines Fundamentalsystems von Lösungen eines linearen Differentialsystems entwickelt haben, die Möglichkeit eröffnen, auch *andere Methoden* für den in Rede stehenden Existenzbeweis dienstbar zu machen. Wir beabsichtigen das letztere in einer folgenden (vierten) Abhandlung auseinanderzusetzen und zwar für diejenige Fassung des *Riemann*schen Problems, die *Riemann* selbst in dem Fragmente aufstellt und die über die von uns bisher festgehaltene Fassung darin hinausgeht, daß an die Stelle der schlichten x-Ebene eine zu einem beliebigen algebraischen Gebilde gehörige *Riemann*sche Fläche tritt. Dieses allgemeinere Problem unterscheidet sich von dem hier behandelten wesentlich dadurch, daß die Substitutionen, die das zu bestimmende Funktionssystem erfahren soll, wenn der variable Punkt der $(2p+1)$-fach zusammenhängenden *Riemann*schen Fläche die $2p$ kanonischen Querschnitte, die diese Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandeln, überschreitet, nicht mehr willkürlich vorgeschrieben werden dürfen, sondern gewissen Gleichungen und Ungleichungen zu genügen haben, die denjenigen analog sind, die für die Periodizitätsmoduln der *Abel*schen Integrale bestehen.

In den Bezeichnungen und in der Nummerierung der Abschnitte schließt sich diese Abhandlung an die beiden vorangegangenen (A1 und A2) an; eine kurze Zusammenfassung der Resultate ist in den Comptes Rendus der Akademie der Wissenschaften zu Paris**) erschienen.

XI.

Es sei auf irgend eine Weise eine *Art* von Funktionssystemen***) mit den Verzweigungspunkten $a_1, \dots a_\sigma, \infty$ und den Fundamentalsubstitutionen

$$A_\nu = \underset{(i,\varkappa = 1,2,\dots n)}{(A_{i\varkappa}^{(\nu)})}, \qquad (\nu = 1,2,\dots\sigma)$$

die wir aber jetzt nicht als unimodular voraussetzen wollen, gegeben:

$$\begin{pmatrix} a_1, \dots a_\sigma, \infty \\ A_1, \dots A_\sigma \end{pmatrix}.$$

*) Dieses Journal Bd. 128, S. 263ff. Nr. III; diese Abhandlung soll im folgenden mit dem Zeichen BS zitiert werden.

**) Comptes Rendus, 18 avril, 1904.

***) A 1, S. 160.

Durch n ihr zugehörige Funktionssysteme

$$(1.)\qquad (y_{i\varkappa}), \qquad\qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

deren Determinante $|y_{i\varkappa}|$ nicht identisch verschwindet, und wo der zweite Index $\varkappa$ die Ordnungszahl des Funktionssystems, der erste i die Ordnungszahl seiner einzelnen Elemente, angibt, ist zufolge des Satzes 1. der Nr. III*) die ganze Art in der Weise bestimmt, daß jedes ihr angehörige Funktionssystem in der Form

$$p_1 y_{i1} + p_2 y_{i2} + \cdots + p_n y_{in}, \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

wo die $p_1, \dots p_n$ rationale Funktionen von x bedeuten, dargestellt werden kann. So aufgefaßt, haben wir es also im Sinne *Riemanns* mit einer aus n^2 Funktionen gebildeten *Matrix* $(y_{i\varkappa})$ nicht identisch verschwindender Determinante zu tun, deren Elemente in der durch die Querschnitte $(a_\lambda, \infty) = l_\lambda$ zerschnittenen x-Ebene den Charakter rationaler Funktionen besitzen und in den Punkten $a_1, \dots a_\sigma, \infty$ selbst nicht unbestimmt werden, und die, wenn x den Querschnitt l_λ einmal in positiver Richtung überschreitet, in dem Sinne die Substitution A_λ erleidet, daß $(y_{i\varkappa})$ sich in

$$(2.)\qquad (\mathrm{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)})(y_{i\varkappa})$$

verwandelt. Wir nennen eine solche Matrix kurz eine *Matrix der Art.*

Jede andere Matrix der Art $(z_{i\varkappa})$ ist dann in der Form

$$(3.)\qquad (z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(p_{i\varkappa})$$

darstellbar, wo $p_{i\varkappa}$ eine *rationale Matrix* mit nicht identisch verschwindender Determinante bedeutet; nehmen wir insbesondere

$$(z_{i\varkappa}) = \left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right),$$

so ist also

$$(4.)\qquad \left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y_{i\varkappa})(a_{i\varkappa}),$$

wo $(a_{i\varkappa})$ eine rationale Matrix darstellt, d. h. $(y_{i\varkappa})$ ist eine *Integralmatrix***) des linearen Differentialsystems

$$(\mathrm{A}.)\qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa} y_\lambda. \qquad\qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

*) A 1, S. 162.

**) Vergl. hierfür, wie auch für die im folgenden anzuwendenden Termini und Zeichen die Abhandlung BS.

Die Bedeutung der Matrix $(a_{i\varkappa})$ für unser Problem besteht darin, daß auf Grund des Existenztheorems für die Lösungen des Differentialsystems (A.) die Art auch durch Angabe von $(a_{i\varkappa})$ bestimmt werden kann. Die Form, in welcher wir dieses Existenztheorem*) dargestellt haben, fügt sich ganz naturgemäß in den Ideengang des *Riemann*schen Fragmentes ein. Wir bezeichnen das Differentialsystem (A.) als *eines der Art*, es gehört natürlich zur *Fuchs*schen Klasse, und die Koeffizientenmatrix des allgemeinsten Differentialsystems der Art ist nach (3.) und der Gleichung (III.), Nr. I von BS in der Form

$$(p_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(p_{i\varkappa}) + \mathrm{D}_x(p_{i\varkappa})$$

enthalten.

Wir betrachten nun insbesondere eine zur *Hauptklasse***) unserer Art gehörige Matrix $(y_{i\varkappa})$, d. h. eine Matrix, deren n Kolonnen Funktionssysteme der Hauptklasse sind. Da jedes Funktionssystem der Art durch Multiplikation mit einer ganzen rationalen Funktion von x in ein Funktionssystem der Hauptklasse verwandelt werden kann, so läßt sich aus jeder Matrix der Art, indem man dieselbe von rechts mit einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} g_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2(x) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & g_n(x) \end{pmatrix}$$

komponiert, wo die $g_\varkappa(x)$ ganze rationale Funktionen von x bedeuten, eine Matrix $(y_{i\varkappa})$ der Hauptklasse herleiten. Jede andere Matrix der Hauptklasse $(z_{i\varkappa})$ geht dann aus $(y_{i\varkappa})$ durch Rechtskomposition mit einer rationalen Matrix $(R_{i\varkappa})$ hervor. Die besondere Form, welche die Elemente $R_{i\varkappa}$ annehmen müssen, damit die Matrix $(y_{i\varkappa})(R_{i\varkappa})$ wirklich zur Hauptklasse gehört, lassen sich leicht direkt angeben,***) wir wollen aber, um weitläufige Erörterungen, die nichts prinzipiell neues enthalten, zu vermeiden, die Feststellung dieser Form dadurch umgehen, daß wir die hier auftretenden Fragen auf die in der Nr. III†) durchgeführten Betrachtungen zurückführen.

---

*) BS, Nr. I—III.

**) A 1, S. 160.

***) Vergl. BS, Nr. VIII.

†) A 1, S. 162 ff.

Die Matrix

$$(y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}),$$

wo die r_{i1} bis auf $r_{\lambda 1}$, welches gleich Eins zu nehmen ist, gleich Null sind und die $r_{i\varkappa}(\varkappa > 1)$ durch die Gleichungen*)

$$r_{i\varkappa} = \frac{dr_{i,\varkappa-1}}{dx} + \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} r_{\nu,\varkappa-1} \qquad (a_{i\varkappa}) = \mathfrak{D}_x(y_{i\varkappa})$$

bestimmt werden, ist offenbar nichts anderes als die *Wronski*sche Matrix

$$(5.) \qquad \left(\frac{d^{\varkappa-1} y_{i\lambda}}{dx^{\varkappa-1}}\right), \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

die ihrerseits die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung der Hauptklasse

$$(6.) \qquad \frac{d^n y_\lambda}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y_\lambda}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y_\lambda = 0$$

bestimmt und umgekehrt, von einer links komponierenden konstanten Matrix nicht verschwindender Determinante abgesehen, durch diese Differentialgleichung, für welche $y_{1\lambda}, \dots y_{n\lambda}$ ein Fundamentalsystem darstellen, bestimmt wird. — In der Nr. III**) haben wir aber im Anschlusse an *Riemann* gezeigt, daß sich jedes System $z_1, \dots z_n$ der Hauptklasse durch die Elemente einer zur Hauptklasse gehörigen *Wronski*schen Matrix (5.) in der Form

$$G(x) \cdot H(x) \cdot z_\varkappa = h_0 y_{\varkappa\lambda} + h_1 \frac{dy_{\varkappa\lambda}}{dx} + \cdots + h_{n-1} \frac{d^{n-1} y_{\varkappa\lambda}}{dx^{n-1}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

darstellen läßt, wo $G(x)$, $H(x)$, $h_0, \dots h_{n-1}$ ganze rationale Funktionen bedeuten, deren Beschaffenheit a. a. O.***) angegeben ist. — Da die beliebige Matrix der Hauptklasse $(y_{i\varkappa})$ aus der *Wronski*schen Matrix (5.) durch Rechtskomposition mit $(r_{i\varkappa})^{-1}$ hervorgeht, ist damit die Darstellung eines beliebigen Funktionssystems der Hauptklasse durch die Matrix $(y_{i\varkappa})$ gegeben.

XII.

Die Erörterungen der Nummern IV†) und VI††) waren wesentlich auf das Ziel gerichtet, gewisse Funktionssysteme der Hauptklasse (Hauptsysteme) herzustellen, die durch ihre Eigenschaften innerhalb der Hauptklasse

*) Vergl. BS, Nr. VII, Gln. (6.)

**) Und ausführlicher, *Handbuch* etc. Bd. II 1, Nr. 224 ff.

***) A 1, S. 164—166.

†) A 1, S. 166 ff.

††) A 2, S. 292 ff.

eindeutig bestimmt sind. Die Lösung dieser Aufgabe, welche die Grundlage für die Untersuchungen der Nummern VII und IX*) bildete, gelingt nun in sehr viel vollkommenerer Weise, als es auf dem damals innegehaltenen Standpunkte möglich war, wenn man statt nach Funktionssystemen — also q. i. e. *Wronski*schen Matrizen — nach *beliebigen* Matrizen der Hauptklasse fragt, die innerhalb dieser eindeutig bestimmt sind. — Der Weg, der zu diesen *Hauptmatrizen* führt, ist durch die Untersuchungen der Nr. IV auch schon vollständig geebnet. Wir haben, im Anschlusse an *Riemann*, daselbst gezeigt, wie man ausgehend von einem Funktionssysteme der Hauptklasse, welches wir a. a. O. mit $y_1, \dots y_n$ bezeichnet hatten, jetzt aber

$$(1.) \qquad y_{1\lambda}, y_{2\lambda}, \dots y_{n\lambda}$$

nennen wollen, zu denjenigen Funktionssystemen der Hauptklasse gelangen kann, die für die wesentlich singulären Stellen $a_1, \dots a_\sigma, \infty$ dieselben Exponenten aufweisen, wie das System (1.). Es ergab sich, daß die Mannigfaltigkeit dieser Systeme durch die Anzahl der einfach zu zählenden außerwesentlich singulären Stellen des Funktionssystems (1.), d. h. also**) durch die Anzahl der einfach zu zählenden außerwesentlich singulären Stellen der *Wronski*schen Matrix

$$\left(\frac{d^{\varkappa-1} y_{i\lambda}}{dx^{\varkappa-1}}\right) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

bestimmt wird. Wenn nämlich diese Anzahl die in der Nr. IV***) berechnete Minimalzahl

$$\varrho_0 = 1 - n + (\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2}$$

um ν übertraf, so hing das allgemeinste Funktionssystem der Hauptklasse, welches mit dem Systeme (1.) in allen Exponenten übereinstimmt, noch genau von $\nu + 1$ linear und homogen eingehenden willkürlichen Konstanten ab. Statt nun, wie es a. a. O. nach dem Vorgange *Riemanns* geschehen ist, die Anzahl dieser willkürlichen Konstanten durch Erhöhung einzelner Exponenten bis auf *eine* herabzudrücken, wollen wir jetzt wie folgt verfahren. Wenn $\nu > n-1$ ist, so *reduzieren* wir wie a. a. O. durch Erhöhung einzelner

---

*) A 2, S. 294 ff.; S. 307 ff.

**) Vergl. A 1, S. 163, 164; BS, S. 279.

***) A 1, S. 168.

Exponenten die Anzahl der willkürlichen Konstanten bis auf n, wenn dagegen $\nu < n-1$ ist, so *erhöhen* wir die Anzahl der willkürlichen Konstanten bis auf n dadurch, daß wir einzelne der Exponenten erniedrigen, d. h. also von den Bedingungsgleichungen, die a. a. O. den Koeffizienten der ganzen rationalen Funktionen $h_0(x), h_1(x), \dots h_{n-1}(x)$ in Gleichung (1.) Nr. IV*) auferlegt wurden, damit für die im Endlichen gelegenen singulären Punkte $a_1, \dots a_\sigma$ Übereinstimmung der Exponenten stattfinde, eine genügende Anzahl weglassen. Wir erhalten auf diese Weise das allgemeinste Funktionssystem der Hauptklasse, welches genau $\varrho_0 + n - 1$ einfach zu zählende außerwesentlich singuläre Stellen aufweist, und linear und homogen von genau n willkürlichen Konstanten abhängt. Indem wir nun über diese Konstanten in geeigneter Weise verfügen, können wir n *linear unabhängige* solche Funktionssysteme

$$z_{1\varkappa},\ z_{2\varkappa},\ \dots\ z_{n\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n) \tag{2.}$$

herstellen, durch welche dann jedes andere linear, homogen mit konstanten Koeffizienten darstellbar ist. Diese Funktionssysteme (2.) haben dann die folgenden Eigenschaften. Ihre Determinante $|z_{i\varkappa}|$ ist nicht identisch Null, jedes einzelne Funktionssystem (d. h. die mit demselben gebildete *Wronski*sche Matrix) besitzt $\varrho_0 + n - 1$ einfach zu zählende außerwesentlich singuläre Stellen, endlich weisen alle diese Funktionssysteme bei allen singulären Punkten $a_1, \dots a_\sigma, \infty$ dieselben Exponentensysteme auf, und zwar ist, wenn wir die dem singulären Punkte a_λ $(a_{\sigma+1} = \infty)$ entsprechenden Exponenten mit $r_1^{(\lambda)}, r_2^{(\lambda)}, \dots r_n^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \dots \sigma + 1)$ bezeichnen, zufolge der *Fuchs*schen Relation (vergl. Gleichung (5ᵃ.) Nr. III)**)

$$\sum_{\lambda=1}^{\sigma+1} \sum_{\varkappa=1}^{n} r_\varkappa^{(\lambda)} = \varrho_0 + n - 1 - (\sigma - 1)\frac{n(n-1)}{2},$$

also mit Rücksicht auf den Wert von ϱ_0

$$\sum_{\lambda=1}^{\sigma+1} \sum_{\varkappa=1}^{n} r_\varkappa^{(\lambda)} = 0. \tag{3.}$$

Wir fassen nun die n Funktionssysteme (2.) zu einer Matrix $(z_{i\varkappa})$ zusammen. Diese gehört offenbar zur Hauptklasse. Da ferner, wenn wir für

*) A 1, S. 167.
**) A 1, S. 165.

einen Augenblick

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} r_\varkappa^{(\lambda)} = r_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \sigma + 1)$$

setzen, das Produkt

$$(4.) \qquad |z_{i\varkappa}|_{(i,\varkappa=1,2,\ldots n)} \cdot (x-a_1)^{-r_1} \ldots (x-a_\sigma)^{-r_\sigma}$$

für alle endlichen Werte von x holomorph und in der Umgebung von $x = \infty$ in der Form

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{r_1+r_2+\cdots+r_\sigma+r_{\sigma+1}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

darstellbar ist, wo $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ eine in der Umgebung von $x = \infty$ holomorphe Funktion bedeutet, so folgt aus der Gleichung (3.), daß dieses Produkt eine Konstante und zwar, da die Determinante $|z_{i\varkappa}|$ nicht identisch verschwindet, eine von Null verschiedene Konstante C ist. *Hiernach besitzt*) die Matrix* $(z_{i\varkappa})$ *keine außerwesentlich singuläre Stelle.* — Denken wir uns jetzt die Matrix $(z_{i\varkappa})$ durch Linkskomposition mit einer geeignet gewählten konstanten Matrix $(c_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ in die zum Punkte $x = a_\lambda$ gehörige *kanonische Matrix**)*

$$(c_{i\varkappa}^{(\lambda)})(z_{i\varkappa}) = (\eta_{i\varkappa}^{(\lambda)}) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \sigma + 1)$$

übergeführt, so *gehören* die sämtlichen Elemente einer jeden Zeile

$$\eta_{i1}^{(\lambda)}, \eta_{i2}^{(\lambda)}, \ldots \eta_{in}^{(\lambda)},$$

im Sinne von *Fuchs,***) zu demselben Exponenten* $r_i^{(\lambda)}$. Wenn wir demgemäß aus jeder Zeile den Faktor $(x-a_\lambda)^{r_i^{(\lambda)}}$ links herausziehen und

$$(\eta_{i\varkappa}^{(\lambda)}) = (\delta_{i\varkappa}(x-a_\lambda)^{r_i^{(\lambda)}})(L_{i\varkappa})$$

setzen, so folgt, da das Produkt (4.) gleich der von Null verschiedenen Konstanten C ist, daß die Determinante $|L_{i\varkappa}|$ für $x = a_\lambda$ einen endlichen und von Null verschiedenen Wert hat. Das Differentialsystem der *Fuchs*schen Klasse, welches durch die Matrix $(z_{i\varkappa})$ befriedigt wird, hat demnach†) für alle wesentlich singulären Punkte $a_1, \ldots a_\sigma, \infty$ die kanonische Form, es ist

*) A 1, Nr. III, S. 163.

**) Vergl. BS, S. 287.

***) Dieses Journal Bd. 68, S. 142, Werke Bd. I, S. 181.

†) Siehe die Bemerkung 2. Nr. VII, BS, S. 287.

also, da außerwesentlich singuläre Punkte überhaupt nicht vorhanden sind, *schlechthin kanonisch,**) **d. h. von der Gestalt**

$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{h_{\lambda\varkappa}(x)}{\varphi(x)} z_\lambda, \qquad (5.) \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

wo die $h_{i\varkappa}(x)$ **ganze rationale Funktionen von höchstens** $(\sigma - 1)$**-tem Grade bedeuten und**

$$\varphi(x) = (x - a_1) \dots (x - a_\sigma)$$

ist. Die Exponenten $r_1^{(\lambda)}, \dots r_n^{(\lambda)}$ **sind nichts anderes als die Wurzeln der zu** $a_\lambda (a_{\sigma+1} = \infty)$ **gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung**

$$\left| \operatorname{Res}_{a\lambda} \frac{h_{i\varkappa}}{\varphi(x)} - \delta_{i\varkappa} r \right| = 0. \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

Da, wie bereits oben bemerkt, jedes Funktionssystem der Hauptklasse, welches für alle wesentlich singulären Punkte dieselben Exponenten aufweist wie die Kolonnen der Matrix $(z_{i\varkappa})$ **durch diese** n **Kolonnen linear homogen und mit konstanten Koeffizienten darstellbar ist, so ist die Matrix** $(z_{i\varkappa})$ **durch ihre Exponenten innerhalb der Hauptklasse, von einer rechtskomponierenden Matrix** $(c_{i\varkappa})$**, deren Elemente willkürliche Konstanten sind, abgesehen,** *eindeutig* **festgelegt. Das gleiche gilt folglich von der Koeffizientenmatrix des Differentialsystems (5.) abgesehen von der Transformation mit der Matrix** $(c_{i\varkappa})$**:**

$$(c_{i\varkappa})^{-1} \left(\frac{h_{i\varkappa}(x)}{\varphi(x)} \right) (c_{i\varkappa}),$$

die nach der Regel (III.) Nr. I, B S) dem Übergange von** $(z_{i\varkappa})$ **zu** $(z_{i\varkappa})(c_{i\varkappa})$ **entspricht.**

Um die Matrix $(z_{i\varkappa})$ **völlig eindeutig festzulegen, wollen wir***) ihr die Bedingung auferlegen, daß sie sich für einen bestimmten regulären Punkt** $x = x_0$ **auf die Einheitsmatrix** $(\delta_{i\varkappa})$ **reduziert; wir nennen das so bestimmte** $(z_{i\varkappa})$ **dann eine (für** x_0**)** *normierte Hauptmatrix.* **Daß diese dann wirklich eindeutig fixiert ist, folgt aus der — stets vorausgesetzten — Irreduzibilität der Art**

$$\begin{pmatrix} a_1, \dots a_\sigma, \infty \\ A_1, \dots A_\sigma \end{pmatrix}.$$

*) Siehe BS, Nr. VIII, S. 291.

**) S. 267.

***) Vergl. Nr. VI, A 2, S. 292 ff.

XIII.

Um die Bedeutung des Fundamentalsatzes für die Theorie der Klassen von Funktionssystemen hervortreten zu lassen, denken wir uns die $a_1, \dots a_\sigma$ fest. Dann hängt die Art, oder, wie wir der Einfachheit wegen lieber sagen wollen, die *Hauptklasse* noch von den Koeffizienten $(\mathrm{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ der Fundamentalsubstitutionen ab. Diese $n^2\sigma$ Größen bestimmen also — bei festen $a_1, \dots a_\sigma$ — die Hauptklasse, und können demzufolge als *Invarianten der Klasse* angesehen werden.

Das Differentialsystem (5.) der vorigen Nummer, welches durch die normierte Hauptmatrix $(z_{i\varkappa})$ befriedigt wird, enthält in seinen Koeffizienten ebenfalls genau $n^2\sigma$ Konstanten; wir können diese am übersichtlichsten in Evidenz setzen, wenn wir uns (vergl. BS, Nr. VIII.) die rationalen Funktionen

$$\frac{h_{i\varkappa}(x)}{\varphi(x)}$$

in Partialbrüche zerlegt denken; es sei dann

$$(1.)\qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu}. \qquad (\varkappa=1,2,\dots n)$$

Es handelt sich nunmehr darum, über die Art, wie die $n^2\sigma$ Größen $\mathrm{A}_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}$ (die Elemente der Fundamentalsubstitutionen $\mathrm{A}_1, \dots \mathrm{A}_\sigma$) von den $n^2\sigma$ Größen $A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}$, und umgekehrt diese von jenen, abhängen, Aufschluß zu erhalten. — Da $(z_{i\varkappa})$ sich für $x=x_0$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduzieren sollte, ist*)

$$(2.)\qquad (z_{i\varkappa}) = T\int_{x_0}^{x}\Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{i\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\Big),$$

wo wir mit T die durch die Querschnitte $l_1, \dots l_\sigma$ zerschnittene x-Ebene bezeichnen, und folglich, wenn s_λ einen geschlossenen Weg bedeutet, der von x_0 ausgehend den Querschnitt l_λ einmal im positiven Sinne überschreitet:

$$(3.)\qquad (\mathrm{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)}) = s_\lambda\int_{x_0}^{x_0}\Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{i\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\Big). \qquad (\lambda=1,2,\dots\sigma)$$

S. 388 ff.). Daß der Fall $n=2$ hier eine Ausnahme bildet, hängt damit zusammen, daß für diesen Fall durch Anwendung der *Fuchs*schen Transformation (siehe *Heffter*, Inauguraldissertation, 1886, S. 5ff.) die Differentialgleichung stets auf eine solche Form gebracht werden kann, daß sie unmittelbar einem schlechthin kanonischen Differentialsysteme erster Ordnung äquivalent ist.

*) Vergl. BS, Nr. VIII, S. 292.

Durch diese Gleichungen sind die $\mathrm{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ als Funktionen der $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ dargestellt. Aus den Untersuchungen, die Herr *Poincaré**) für lineare homogene Differentialgleichungen p-ter Ordnung angestellt hat, folgt, daß die durch die Gleichungen (3.) definierten $\mathrm{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ *ganze transzendente* Funktionen der $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ sind. Unter diesen ganzen transzendenten Funktionen sind aber im allgemeinen gewisse von höchst einfacher, andere von sehr viel komplizierterer Natur. So z. B. werden die Wurzeln $\omega_1^{(\lambda)}, \dots \omega_n^{(\lambda)}$, der zu der Matrix A_λ gehörigen Fundamentalgleichung

$$(4.)\qquad |\mathrm{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)} - \delta_{i\varkappa}\omega| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

durch die Wurzeln $r_1^{(\lambda)}, \dots r_n^{(\lambda)}$ der zum Punkte a_λ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung

$$(4^a.)\qquad |A_{i\varkappa}^{(\lambda)} - \delta_{i\varkappa} r| = 0, \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \dots n)$$

und ebenso die Wurzeln $\omega_1^{(\sigma+1)}, \dots \omega_n^{(\sigma+1)}$ der zu der Matrix

$$(5.)\qquad \mathrm{A}_{\sigma+1} = (\mathrm{A}_{i\varkappa}^{(\sigma+1)}) = \mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{A}_2^{-1} \dots \mathrm{A}_\sigma^{-1}$$

gehörigen Fundamentalgleichung

$$(6.)\qquad |\mathrm{A}_{i\varkappa}^{(\sigma+1)} - \delta_{i\varkappa}\omega| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

durch die Wurzeln $r_1^{(\sigma+1)}, \dots r_n^{(\sigma+1)}$ der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung

$$(6^a.)\qquad |A_{i\varkappa}^{(\sigma+1)} - \delta_{i\varkappa} r| = 0, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \dots n)$$

wo

$$(5^a.)\qquad -(A_{i\varkappa}^{(\sigma+1)}) = (A_{i\varkappa}^{(1)}) + \dots + (A_{i\varkappa}^{(\sigma)}),$$

in äußerst einfacher Weise, nämlich durch die Gleichungen

$$(7.)\qquad \omega_\varkappa^{(\lambda)} = e^{2\pi\sqrt{-1}\, r_\varkappa^{(\lambda)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n;\ \lambda = 1, 2, \dots \sigma+1)$$

bestimmt. Wenn das Differentialsystem (1.) für alle singulären Punkte die *Normalform***) hat — was sich durch Rechtskomposition von $(z_{i\varkappa})$ mit *neutralen Matrizen****) stets erreichen läßt — so werden sogar die Elementarteiler einer jeden Matrix $(\mathrm{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)} - \delta_{i\varkappa}\omega)$ durch die Elementarteiler der zu $x = a_\lambda$ gehörigen *Residuenmatrix*†) $(A_{i\varkappa}^{(\lambda)} - \delta_{i\varkappa} r)$ für $\lambda = 1, 2, \dots \sigma + 1$ voll-

*) Acta Mathematica Bd. IV, S. 212ff.

**) Im Sinne von BS., S. 284.

***) BS, S. 285.

†) BS, S. 284.

kommen bestimmt. In diesem Falle, der z. B. stets eintritt, wenn die Wurzeln einer jeden der Gleichungen (4ª.), (6ª.) einfache sind und sich nicht um ganze Zahlen von einander unterscheiden, sind also durch Angabe der Elementarteiler der Residuenmatrizen $(A_{i\varkappa}^{(\lambda)} - \delta_{i\varkappa} r)$ die Matrizen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ abgesehen von transformierenden konstanten Matrizen bestimmt, wobei natürlich auf die Relationen (5.) und (5ª.) Rücksicht zu nehmen ist. — Denkt man sich die Elementarteiler der Residuenmatrizen etwa durch Angabe der kanonischen Formen $(a_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ der Matrizen $(A_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ gegeben, so daß also

$$(8.)\qquad (A_{i\varkappa}^{(\lambda)}) = (b_{i\varkappa}^{(\lambda)})(a_{i\varkappa}^{(\lambda)})(b_{i\varkappa}^{(\lambda)})^{-1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \sigma + 1)$$

ist, und ebenso die Elementarteiler der Matrizen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)} - \delta_{i\varkappa}\omega)$ durch die kanonischen Formen $(\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ der $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)})$, so daß

$$(8^a.)\qquad (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)}) = (\beta_{i\varkappa}^{(\lambda)})(\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)})(\beta_{i\varkappa}^{(\lambda)})^{-1}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \sigma + 1)$$

wo $(b_{i\varkappa}^{(\lambda)})$, $(\beta_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ konstante Matrizen nicht verschwindender Determinante bedeuten, so lassen sich die $(\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ durch die $(a_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ in einfachster Weise darstellen, am bequemsten wohl, indem man die Integralmatrizen der linearen Differentialsysteme mit konstanten Koeffizienten

$$(9.)\qquad \frac{d\eta_\varkappa^{(\lambda)}}{dx} = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu\varkappa}^{(\lambda)} \eta_\nu^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \sigma + 1)$$

zu Hilfe nimmt. Dagegen sind die *übrigen* Parameter, von denen die *Gesamtheit* der Matrizen (8ª.) noch abhängt, durch die übrigen Parameter, von denen die *Gesamtheit* der Matrizen (8.) noch abhängt, im allgemeinen als sehr viel kompliziertere, immerhin aber ganze transzendente Funktionen der letzteren Parameter bestimmt.

Diese Scheidung der funktionalen Abhängigkeit der $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ von den $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ in eine Kategorie von einfachen Abhängigkeiten und eine zweite von sehr komplizierten, ist, wie wir sehen werden, für die Lösung des *Riemann*schen Problems von der größten Wichtigkeit, indem es dadurch möglich wird, das wahre Wesen dieses Problems von allem Nebensächlichen loszulösen. —

Wir fassen die Ergebnisse dieser Nummer wie folgt zusammen:

Denkt man sich in dem linearen Differentialsysteme (1.) einerseits die $a_1, \ldots a_\sigma$, andererseits die kanonischen Formen $(a_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ der Matrizen $(A_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ (für $\lambda = 1, 2, \ldots \sigma + 1$) *fest gegeben*, die letzteren der Gleichung (5ª.) gemäß und derart, daß das System (1.) für alle singulären Punkte $a_1, \ldots a_\sigma, \infty$ die Normalform hat, dann bleiben in (1.) noch gewisse Parameter $b_1, \ldots b_N$,

deren Anzahl N keinesfalls größer ist als $n^2\sigma-(\sigma+1)n+1$, willkürlich; diese Parameter sind durch die transformierenden Matrizen $(b_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ der Gleichungen (8.) und durch die in der Gleichung (5ª.) enthaltenen Beschränkungen in Evidenz gesetzt. In den Fundamentalsubstitutionen $\mathrm{A}_1,\dots \mathrm{A}_\sigma$, welche die Integralmatrix (2.) von (1.) an den Querschnitten $l_1,\dots l_\sigma$ erleidet, sind dann die kanonischen Formen $(\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ von A_λ (für $\lambda=1,2,\dots\sigma+1$) festgelegt; diese Fundamentalsubstitutionen enthalten also noch N unbestimmte Parameter $\beta_1,\dots\beta_N$, die durch die transformierenden Matrizen $(\beta_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ der Gleichungen (8ª.) und die beschränkende Relation (5.) in Evidenz gesetzt sind. Die $\beta_1,\dots\beta_N$ sind ganze transzendente Funktionen der $b_1,\dots b_N$, *also durch Angabe dieser letzteren Größen eindeutig bestimmt.* Andererseits ist durch Angabe der $\beta_1,\dots\beta_N$ das System der Fundamentalsubstitutionen und damit die Hauptklasse, der das Differentialsystem (1.) beziehungsweise die Matrix (2.) angehört, vollkommen bestimmt; nach dem Fundamentaltheorem der Nr. XII ist ferner die Matrix $(z_{i\varkappa})$ beziehungsweise das Differentialsystem (1.) — da die $(\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ und damit die sämtlichen Exponenten $r_\varkappa^{(\lambda)}$ als fest angesehen werden — innerhalb der Hauptklasse eindeutig bestimmt; *es kann folglich nicht zwei von einander verschiedene Wertsysteme der Parameter $b_1,\dots b_N$ geben, denen dasselbe Wertsystem der $\beta_1,\dots\beta_N$ entspricht. Wir können also ebensowohl die $\beta_1,\dots\beta_N$ als auch die $b_1,\dots b_N$ als die genuinen Bestimmungsstücke oder Invarianten der Hauptklasse ansehen, wenn die $a_1,\dots a_\sigma$ und die $(\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ (für $\lambda=1,2,\dots,\sigma+1$) als gegeben vorausgesetzt werden.*

XIV.

Wir wenden uns jetzt dem *Riemann*schen Probleme zu. Im Sinne der in dieser Abhandlung eingeführten Auffassung und namentlich auf Grund des Fundamentaltheorems der Nr. XII können wir das *Riemann*sche Problem wie folgt formulieren:

Gegeben seien die σ singulären Punkte $a_1,\dots a_\sigma$ und die σ Fundamentalsubstitutionen $\mathrm{A}_1,\dots \mathrm{A}_\sigma$; man bestimme die Koeffizienten

$$A_{i\varkappa}^{(\lambda)} \qquad (i,\varkappa=1,2,\dots n;\ \lambda=1,2,\dots\sigma)$$

in dem schlechthin kanonischen Differentialsysteme (1.) voriger Nummer derart, daß die Integralmatrix (2.) voriger Nummer die gegebenen Substitutionen A_λ erleidet, wenn x die Querschnitte l_λ im positiven Sinne überschreitet, d. h. mit anderen Worten so, daß die Gleichungen (3.) voriger Nummer die gegebenen Substitutionen A_λ liefern.

Es handelt sich also darum, bei gegebenen $a_1, \dots a_\sigma$, die Gleichungen (3.) nach den $(A_{ix}^{(\lambda)})$ aufzulösen, beziehungsweise den Nachweis zu führen, daß diese Auflösung für willkürlich gegebene $\mathrm{A}_{ix}^{(\lambda)}$ möglich ist.

Wir zerlegen die Lösung dieser Aufgabe in zwei Teile, einen *leichteren* und einen *schwierigeren*. Der „leichtere" Teil besteht darin, die $A_{ix}^{(\lambda)}$ so zu bestimmen, daß die durch die Gleichungen (3.) der vorigen Nummer dargestellten Matrizen

$$(1.)\qquad {}_{s_\lambda}\mathop{\mathrm{I}}_{x_0}^{x_0}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)\qquad (\lambda=1,2,\dots\sigma)$$

mit den vorgeschriebenen Matrizen $\mathrm{A}_\lambda(\lambda=1,2,\dots\sigma)$, und die Matrix

$$(2.)\qquad {}_{s_{\sigma+1}}\mathop{\mathrm{I}}_{x_0}^{x_0}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)=\left({}_{s_1}\mathop{\mathrm{I}}_{x_0}^{x_0}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)\right)^{-1}\cdots\left({}_{s_\sigma}\mathop{\mathrm{I}}_{x_0}^{x_0}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)\right)^{-1},$$

wo $s_{\sigma+1}$ einen von x_0 ausgehenden Weg bedeutet, der den Punkt $x=\infty$ einmal im positiven Sinne umkreist, mit der Matrix

$$\mathrm{A}_{\sigma+1}=\mathrm{A}_1^{-1}\dots\mathrm{A}_\sigma^{-1}$$

in den Elementarteilern ihrer Fundamentalgleichungen übereinstimmen. Die Lösung dieses Teiles unserer Aufgabe bietet nur Schwierigkeiten algebraischer Natur dar. Die dabei zur Anwendung gelangenden Methoden sind in der klassischen Theorie der linearen Differentialgleichungen so vollständig entwickelt, daß es überflüssig erscheint, näher auf dieselben einzugehen. Wir wollen uns deshalb hier auf die Behandlung desjenigen Falles beschränken, wo diese Art von Schwierigkeiten ganz entfällt, des Falles nämlich, *wo die zu den gegebenen Substitutionen* $\mathrm{A}_1, \dots \mathrm{A}_\sigma$ *und zu* $\mathrm{A}_{\sigma+1}$ *gehörigen Fundamentalgleichungen keine mehrfachen Wurzeln, also lauter einfache und von einander verschiedene Elementarteiler haben.*

Bedeuten dann wieder $\omega_x^{(\lambda)}$ $(x=1,2,\dots n)$ die Wurzeln der zu A_λ $(\lambda=1,2,\dots\sigma+1)$ gehörigen Fundamentalgleichungen, so wählen wir die $(\sigma+1)n$ Größen $r_x^{(\lambda)}$ den Gleichungen (7.) der vorigen Nummer gemäß und überdies so, daß

$$(3.)\qquad \sum_{\lambda=1}^{\sigma+1}\sum_{x=1}^{n} r_x^{(\lambda)}=0,$$

und richten die $A_{ix}^{(\lambda)}$ so ein, daß

$$\left|A_{ix}^{(\lambda)}-\delta_{ix}\,r\right|_{(i,x=1,2,\dots n)}=(-1)^n\,(r-r_1^{(\lambda)})\dots(r-r_n^{(\lambda)})\qquad(\lambda=1,2,\dots\sigma+1)$$

sei, wo die Matrix $(A_{i\varkappa}^{(\sigma+1)})$ mit $(A_{i\varkappa}^{(1)}), \dots (A_{i\varkappa}^{(\sigma)})$ durch die Gleichung (5ᵃ.) der vorigen Nummer verknüpft ist. Die $n^2\sigma$ Größen $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \dots \sigma)$ hängen dann noch von

$$(5.) \qquad N = n^2\sigma - (\sigma + 1)n + 1$$

willkürlichen Parametern ab. Wir denken uns diese auf irgend eine Weise fixiert und verstehen also unter $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ *irgend ein* System von $n^2\sigma$ Größen, das den Bedingungen (4.) Genüge leistet. Für das mit diesen Größen als Koeffizienten gebildete Differentialsystem (1.) Nr. XIII bezeichnen wir die für $x = x_0$ sich auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduzierende Integralmatrix mit $(\zeta_{i\varkappa})$ und die Matrizen (1.) und (2.) mit $(\mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ $(\lambda = 1, 2, \dots \sigma)$ und $(\mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(\sigma+1)})$. Da diese Matrizen natürlich mit den gegebenen A_λ und $\mathsf{A}_{\sigma+1}$ in den Elementarteilern ihrer Fundamentalgleichungen übereinstimmen, so haben wir

$$(6.) \qquad \mathsf{A}_\lambda = (\gamma_{i\varkappa}^{(\lambda)})(\mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)})(\gamma_{i\varkappa}^{(\lambda)})^{-1}, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \sigma + 1)$$

wo die $(\gamma_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ Matrizen nicht verschwindender Determinante bedeuten. In einer solchen transformierenden Matrix $(\gamma_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ sind nicht alle n^2 Elemente wesentlich, sondern nur $n^2 - n$.

Es seien nun $(b_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ $(\lambda = 1, 2, \dots \sigma)$ Matrizen nicht verschwindender Determinante, deren Elemente willkürliche Konstanten sind. Wir betrachten das schlechthin kanonische Differentialsystem (1ᵃ.), dessen Koeffizientenmatrix durch

$$(7.) \qquad \sum_{\nu=1}^{\sigma} (b_{i\varkappa}^{(\nu)})\left(\frac{A_{i\varkappa}^{(\nu)}}{x - a_\nu}\right)(b_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}$$

dargestellt wird. Für dieses stimmen die Wurzeln der zu $a_1, \dots a_\sigma$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen mit den entsprechenden Wurzeln für das Differentialsystem (1.) Nr. XIII, d. h. mit den Größen $r_\varkappa^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \dots \sigma)$ überein; um auch für die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung der Differentialsysteme (1ᵃ.) und (1.) Nr. XIII Übereinstimmung zu erzielen, müssen die $n^2\sigma$ Größen $b_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ noch $n - 1$ rationalen Bedingungen unterworfen werden. Da die $(b_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ nur als transformierende Matrizen in betracht kommen, enthalten sie nur $(n^2 - n)\sigma$ wesentliche Parameter, die dann noch jenen $n - 1$ Bedingungen zu genügen haben. Man kann dann (vergl. die Betrachtungen in der vorigen Nummer) die in den $b_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ noch enthaltene Willkürlichkeit in einfacher Weise dadurch in Evidenz

setzen, daß man diese $n^2\sigma$ Größen durch $(n^2-n)\sigma-(n-1)=N$ Parameter $b_1, \dots b_N$ darstellt, die *keinerlei Beschränkung* unterworfen sind.

Da die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen des Differentialsystems (1ª.) zufolge der über die Fundamentalgleichungen der gegebenen Substitutionen $A_1, \dots A_\sigma$ und $A_{\sigma+1}$ gemachten vereinfachenden Annahme, einfache und nicht um ganze Zahlen von einander verschieden sind, hat das Differentialsystem (1ª.) ebenso wie (1.) Nr. XIII für alle singulären Punkte $a_1, \dots a_\sigma, \infty$ die *Normalform,**) es sind demnach die Elementarteiler der Fundamentalgleichungen der Substitutionen

$$(8.)\qquad s_\lambda \int_{x_0}^{x_0} \Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma} (b_{ix}^{(\nu)}) \Big(\frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\Big) (b_{ix}^{(\nu)})^{-1} \Big), \qquad (\lambda=1,2,\dots\sigma+1)$$

die die Integralmatrix

$$(9.)\qquad \bar{T} \int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma} (b_{ix}^{(\nu)}) \Big(\frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\Big) (b_{ix})^{-1} \Big)$$

von (1ª.) an den Querschnitten l_λ $(\lambda=1,2,\dots\sigma)$ und bei Umkreisung von $x=\infty$ erleidet, durch die Elementarteiler der Residuenmatrizen

$$(10.)\qquad (b_{ix}^{(\nu)})(A_{ix}^{(\nu)})(b_{ix}^{(\nu)})^{-1}-(\delta_{ix})r=(b_{ix}^{(\nu)})(A_{ix}^{(\nu)}-\delta_{ix}r)(b_{ix}^{(\nu)})^{-1}, \quad (\nu=1,2,\dots\sigma)$$

beziehungsweise

$$(11.)\qquad -\sum_{\nu=1}^{\sigma} (b_{ix}^{(\nu)})(A_{ix}^{(\nu)})(b_{ix}^{(\nu)})^{-1}-(\delta_{ix})r$$

vollkommen bestimmt. Nun sind aber die Elementarteiler der Matrizen (10.) offenbar mit denen der Matrizen $(A_{ix}^{(\nu)}-\delta_{ix}r)$ identisch, und zufolge der oben erwähnten $n-1$ Bedingungen, stimmen auch die Elementarteiler von (11.) mit denen von $(A_{ix}^{(\sigma+1)}-\delta_{ix}r)$ überein; es sind also die Elementarteiler der Fundamentalgleichungen der Matrizen (8.) beziehungsweise mit denen der Matrizen $(\mathfrak{A}_{ix}^{(\lambda)})$ identisch, d. h. wir haben

$$(12.)\qquad s_\lambda \int_{x_0}^{x_0} \Big(\sum_{\nu=1}^{\sigma} (b_{ix}^{(\nu)}) \Big(\frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\Big) (b_{ix}^{(\nu)})^{-1} \Big) = (\beta_{ix}^{(\lambda)})(\mathfrak{A}_{ix}^{(\lambda)})(\beta_{ix}^{(\lambda)})^{-1}, \qquad (\lambda=1,2,\dots\sigma+1)$$

wo die $(\beta_{ix}^{(\lambda)})$ Matrizen nicht verschwindender Determinante bedeuten.

---

*) Im allgemeinen Falle treten hier wesentlich kompliziertere Verhältnisse auf, deren Erledigung aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten darbietet.

Der zweite „schwierigere" Teil unserer Aufgabe besteht nun darin, zu entscheiden, ob die $(b_{ix}^{(\lambda)})$, d. h. die noch willkürlichen Parameter $b_1, \dots b_N$ sich so einrichten lassen, daß die Matrizen (12.) mit den gegebenen Matrizen (6.) zusammenfallen. Diese Frage enthält das *wahre Wesen* des *Riemann*schen Problems.

Wenn wir die $\mathrm{A}_1, \dots \mathrm{A}_\sigma$ als willkürlich gegeben ansehen (natürlich mit der in unserer vereinfachenden Voraussetzung enthaltenen Beschränkung, die aber für das Prinzip der nun folgenden Erörterungen von untergeordneter Bedeutung ist), so hängen die in den Gleichungen (6.) auftretenden transformierenden Matrizen $(\gamma_{ix}^{(\lambda)})$ noch von genau $N = n^2\sigma - (\sigma+1)n + 1$ willkürlichen Parametern $\beta_1, \dots \beta_N$ ab, die *keinerlei Beschränkung* unterworfen sind. Die transformierenden Substitutionen $(\beta_{ix}^{(\lambda)})$, die in den Gleichungen (12.) auftreten, sind für jedes *bestimmte* Wertesystem der in den linken Seiten dieser Gleichungen enthaltenen Parameter $b_1, \dots b_N$ durch ein *bestimmtes* Wertesystem der Parameter $\beta_1, \dots \beta_N$ gegeben, u. z. sind diejenigen Wertesysteme der $\beta_1, \dots \beta_N$, die in den Gleichungen (12.) für unbeschränkt veränderliche $b_1, \dots b_N$ zum Vorschein kommen, nach den Ergebnissen der vorigen Nummer als der Wertevorrat gewisser ganzer transzendenter Funktionen der $b_1, \dots b_N$ darstellbar, und es kann auch nicht dasselbe Wertesystem der $\beta_1, \dots \beta_N$ für zwei verschiedene Wertesysteme der $b_1, \dots b_N$ zum Vorschein kommen. — Bezeichnen wir ein Wertesystem der unbeschränkt veränderlichen $b_1, \dots b_N$ als einen Punkt B einer Mannigfaltigkeit M, ein Wertesystem der unbeschränkt veränderlichen $\beta_1, \dots \beta_N$ als einen Punkt B einer Mannigfaltigkeit M. Dann entspricht also jedem Punkte B von M ein wohlbestimmter Punkt B von M, und es kann nicht zwei verschiedene Punkte B, B' von M geben, denen derselbe Punkt B von M entspricht. Da aber die Mannigfaltigkeit M in dem Sinne eine geschlossene ist, daß sie keine Grenze hat (da ja die $b_1, \dots b_N$ unbeschränkt veränderliche Größen sind) und da überdies die durch die Gleichungen (12.) dargestellte Beziehung zwischen den Koordinaten der Punkte B von M und denen der Punkte B von M eine analytische ist, so folgt nach den von Herrn *Poincaré* aufgestellten Prinzipien der *méthode de continuité,**) daß auch jedem Punkte B von M ein Punkt B von M entsprechen muß. — Es gibt also stets ein — und nur ein — Wertesystem $b_1, \dots b_N$, für welches die Matrizen (12.) das gegebene System von Funda-

*) Acta Mathematica Bd. IV, S. 234.

mentalsubstitutionen A_i darstellen, und damit ist die Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems, in der Form, wie wir es zu Anfang dieser Nummer formuliert haben, *allgemein* — d. h. ohne daß es nötig wäre, die gegebenen Fundamentalsubstitutionen durch die Konvergenzbedingungen*) zu beschränken — erwiesen.

XV.

Der in der vorigen Nummer erbrachte Existenzbeweis für die dem *Riemann*schen Probleme genügende normierte Hauptmatrix hat insofern etwas unbefriedigendes, als er kein Mittel für die wirkliche Herstellung dieser Hauptmatrix gewährt. Die *Poincaré*schen *séries zétafuchsiennes,* die in dem Falle, wo die $A_1, \dots A_\sigma$ die Konvergenzbedingungen erfüllen, eine solche Darstellung ermöglichen, versagen in dem Falle, wo die Wurzeln der zu den Substitutionen $A_1, \dots A_\sigma$, $A_{\sigma+1}$ gehörigen Fundamentalgleichungen von Eins verschiedene absolute Beträge haben.**) Wir werden in einer folgenden Abhandlung auf andere Methoden für den in Rede stehenden Existenzbeweis und im Zusammenhange damit auch auf die Frage der Darstellung zurückkommen; hier wollen wir nur noch kurz auf die Konsequenzen reflektieren, die sich aus dem jetzt allgemein erbrachten Beweise für die Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems im Zusammenhange mit dem Fundamentalsatze der Nr. XII ziehen lassen.

Betrachtet man in dem Differentialsysteme (1.) der Nr. XIII die $a_1, \dots a_\sigma$ als unbeschränkt veränderliche Größen, und die $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ als von diesen unabhängige Konstanten, so hängen die durch die Gleichungen (3.) Nr. XIII definierten $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ von den $a_1, \dots a_\sigma$ ab. Die Natur dieser Abhängigkeit hat Herr *Poincaré****) für den Fall einer linearen Differentialgleichung p-ter Ordnung der *Fuchs*schen Klasse untersucht, indem er davon Gebraucht macht, daß eine solche Gleichung auf ein kanonisches Differentialsystem von der Form (1.) Nr. XIII zurückgeführt werden kann.

Betrachtet man andererseits, wie in den Nummern V—VII,†) bei unbeschränkt veränderlichen $a_1, \dots a_\sigma$ die Elemente $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ der Fundamental-

*) A 1, S. 147.

**) *Poincaré,* Acta Mathem. Bd. V, S. 269, vergl. Handbuch, Bd. II, 2, S. 353.

***) Acta Mathem. Bd. IV, S. 214; vergl. auch *Vogt,* Thèses (Paris 1889), *P. Günther,* dieses Journal Bd. 106, S. 330, Bd. 107, S. 298.

†) A 1, S. 170 ff., A 2, S. 292 ff.

substitutionen als von den $a_1, \dots a_\sigma$ unabhängige — etwa im Sinne des *Riemann*schen Problems willkürlich vorgeschriebene — Konstanten, so sind die $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ Funktionen der $a_1, \dots a_\sigma$. — Die Resultate der Nr. VII geben nun über die Natur dieser Funktionen, beziehungsweise über ihr Verhalten, wenn die $a_1, \dots a_\sigma$ geschlossene Bahnen beschreiben, vollständigen Aufschluß.

Zunächst folgt aus dem Satze von *Fuchs*,*) daß die Matrix der partiellen Derivierten der Elemente der Integralmatrix (2.) Nr. XIII, nach einem der singulären Punkte a_λ in der Form

$$\left(\frac{\partial z_{i\varkappa}}{\partial a_\lambda}\right) = (z_{i\varkappa})(B_{i\varkappa}^{(\lambda)})$$

darstellbar ist, wo die $B_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ rationale Funktionen von x bedeuten, von der Beschaffenheit, daß die Matrix $\left(\frac{\partial z_{i\varkappa}}{\partial a_\lambda}\right)$ mit $(z_{i\varkappa})$ zu derselben Klasse (Hauptklasse) gehört. — Daraus folgt,**) daß die $(z_{i\varkappa})$ als Funktionen von a_λ aufgefaßt, in der Umgebung jeder endlichen Stelle a_λ, die von x und den übrigen $a_1, \dots a_\sigma$ verschieden ist, holomorph sind.

Wenn die $a_1, \dots a_\sigma$ auf irgendwelchen Bahnen in die Endlagen $\bar{a}_1, \dots \bar{a}_\sigma$ übergehen, so wird***) die normierte Hauptmatrix $(z_{i\varkappa})$ in eine ebenfalls (für $x = x_0$) normierte Hauptmatrix $(\bar{z}_{i\varkappa})$ übergehen, die bei den singulären Punkten $\bar{a}_1, \dots \bar{a}_\sigma, \infty$ dieselben Exponenten aufweist wie $(z_{i\varkappa})$ bei $a_1, \dots a_\sigma, \infty$, und die Substitution A_λ erfährt, wenn x den Schnitt $\bar{l}_\lambda$, der bei der Bewegung der $a_1, \dots a_\sigma$ aus l_λ hervorgegangen ist, einmal im positiven Sinne überschreitet.

Daraus folgt (vergl. Nr. VII), daß, wenn a_λ einen einfachen positiven Umlauf um den Punkt x, beziehungsweise um einen der Punkte $a_h (h < \lambda)$ oder $a_\varkappa (\varkappa > \lambda)$ vollzieht, die Matrix $(z_{i\varkappa})$ in eine für $x = x_0$ normierte Hauptmatrix übergeht, die allenthalben dieselben Exponenten aufweist wie $(z_{i\varkappa})$, und die an den ursprünglichen Schnitten $l_1, \dots l_\sigma$ die in der Nr. VII†) unter (6.), beziehungsweise (7.) oder (8.) angegebenen Substitutionen erfährt. Die entsprechenden Änderungen der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ gestalten sich also wie folgt. Bei dem Umlaufe von a_λ um x werden — da $(z_{i\varkappa})$ in $\mathrm{A}_\lambda (z_{i\varkappa}) \mathrm{A}_\lambda^{-1}$ übergegangen ist — nach Formel (IX^a.) der Abh. BS,††) *alle* Matrizen $(A_{i\varkappa}^{(\nu)})$ mit *derselben*

*) Berliner Sitzungsberichte 1888, S. 1279 ff., vergl. A 2, S. 295.
**) Vergl. A 2, S. 296.
***) Ebenda S. 298.
†) A 2, S. 301, 302.
††) BS, S. 269.

Matrix A_λ transformiert. Bei dem Umlaufe von a_λ um a_k oder $a_\varkappa$ wird dagegen jede Matrix $(A_{i\varkappa}^{(\nu)})$ mit einer Matrix $(b_{i\varkappa}^{(\nu)})$ transformiert, die so beschaffen ist, daß die durch die Formel (12.) Nr. XIV für $\lambda = 1, 2, \ldots \sigma$ dargestellten Matrizen mit den Matrizen (7.) oder (8.) der Nr. VII übereinstimmen.

Durch diese Theoreme ist*) zugleich die Frage, wie die Koeffizienten eines schlechthin kanonischen Differentialsystems (1.) Nr. XIII von einem Parameter t abhängen können, wenn die Fundamentalsubstitutionen der Integralmatrix (2.) Nr. XIII von t unabhängig sind, erledigt.

Es bedarf keiner weiteren Erörterung, wie sich die speziellen Untersuchungen der Nr. IX auf das Differentialsystem (1.) Nr. XIII übertragen; *dagegen können wir jetzt die in jener Nummer stets betonten Beschränkungen, wonach die in betracht kommenden Fundamentalsubstitutionen den Konvergenzbedingungen zu genügen haben, als überflüssig bezeichnen und ebenso den von uns aufgestellten allgemeinen Satz aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen***) *als von jenen Beschränkungen unabhängig erklären.*

Endlich ist die zwischen Herrn *Brodén* und mir***) erörterte Frage betreffs der von Herrn *Brodén* angegebenen Verallgemeinerung des *Riemann*schen Problems im Sinne meiner Bemerkung†) als *allgemein* erledigt zu betrachten.

*) Im Sinne von Nr. V, A 1, S. 172 und Nr. VII, A 2, S. 304.

**) Dieses Journal Bd. 124, S. 47 ff.

***) Dieses Journal Bd. 125, S. 28 ff.

†) a. a. O. S. 30, letzter Absatz.

Berichtigungen.

Dieses Journal Bd. 123, S. 165, Gleichung (5a.) lies $r_\varkappa^{(\lambda)}$ statt $\mathfrak{r}_\varkappa^{(\lambda)}$,
" " " " " 165, " (6.) " $G(x)^n$ statt $G(x)$;
Dieses Journal Bd. 124, S. 292, Zeile 8 v. u. des Textes, lies genügt statt genügen,
" " " " " 294, " 11 v. u. lies a_σ statt a,
" " " " " 306, " 11 v. u. lies vertauscht statt vertaucht,
" " " " " 307, " 12 lies Θ statt θ,
" " " " " 309, " 9 " l_σ " l,
" " " " " 317, " 3 am Fuße des Integralzeichens lies s_g statt $s\mathfrak{g}$,
" " " " " 318, " 9 lies $\overset{h\lambda}{y}$ statt $\overset{\varkappa\lambda}{y}$,
" " " " " 319 ist den Zitaten hinzuzufügen: *R. Alezais*, Thèses (Paris, 1901).

Einige Reihenentwicklungen der unvollständigen Gammafunktion.

Von Herrn *M. Lerch* in Freiburg (Schweiz).

Das Integral

$$Q(-a, \omega) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^{a+1}}$$

geht nach der Substitution

$$x = \frac{\omega}{1-z}$$

in das folgende

$$(1.) \qquad Q(-a) = \omega^{-a} \int_0^1 e^{-\frac{\omega}{1-z}} (1-z)^{a-1} dz$$

über. Ich benutze nun die Potenzentwicklung

$$(2.) \qquad e^{-\frac{\omega}{1-z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) z^\nu,$$

welche allerdings nur für $|z| < 1$ konvergiert, und führe in der unendlichen Reihe

$$(2^*.) \qquad e^{-\frac{\omega}{1-z}} (1-z)^{a-1} = \sum_0^{\infty} \Psi_\nu(\omega) z^\nu (1-z)^{a-1}$$

die Integration zwischen den Grenzen Null und Eins gliedweise aus. Da

$$\int_0^1 z^\nu (1-z)^{a-1} dz = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(a)}{\Gamma(a+\nu+1)} = \frac{\nu!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+\nu)}$$

ist, so entsteht die folgende Darstellung der Funktion $Q(-a, \omega)$:

$$(3.)\quad \begin{cases} \omega^a Q(-a, \omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \dfrac{\nu!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+\nu)} \\ \quad = \dfrac{\Psi_0(\omega)}{a} + \dfrac{1.\Psi_1(\omega)}{a(a+1)} + \dfrac{1.2\Psi_2(\omega)}{a(a+1)(a+2)} + \cdots. \end{cases}$$

Wir setzen ω als reell und positiv voraus, und bemerken, daß die eben auseinandergesetzte Methode verlangt, daß a in seinem reellen Teil positiv bleibt, eine Annahme, die wir festhalten wollen.

Bevor wir zur strengen Rechtfertigung des benutzten Verfahrens übergehen, wollen wir uns über die Natur und Bildungsweise der Koeffizienten $\Psi_\nu(\omega)$ unterrichten.

Offenbar ist

$$\Psi_0(\omega) = e^{-\omega},$$

ferner

$$2\pi i \Psi_\nu(\omega) = \int_{(0)} e^{-\frac{\omega}{1-z}} \frac{dz}{z^{\nu+1}},$$

wobei die Integration im positiven Sinne längs eines um den Nullpunkt in hinreichend kleiner Entfernung geführten Weges geschieht.

Setzt man

$$\frac{1}{1-z} = x,$$

so entsteht

$$(4.)\quad 2\pi i \Psi_\nu(\omega) = \int e^{-\omega x} \frac{x^{\nu-1}}{(x-1)^{\nu+1}} dx,$$

wobei nun der geschlossene Integrationsweg den Punkt $x = 1$ einmal im positiven Sinne umläuft. Dieses Integral hat aber den Wert

$$\frac{2\pi i}{\nu!} [D_z^\nu (e^{-\omega z} z^{\nu-1})]_{z=1}$$

und hieraus folgt

$$\Psi_\nu(\omega) = \frac{1}{\nu!\, \omega^{\nu-1}} D_{z=1}^\nu [e^{-\omega z} (\omega z)^{\nu-1}]$$

oder

$$(5.)\quad \Psi_\nu(\omega) = \frac{\omega}{\nu!} D_\omega^\nu (e^{-\omega} \omega^{\nu-1}).$$

Wird die Differentiation rechts ausgeführt, so entsteht

$$(5^*.)\qquad \Psi_\nu(\omega) = e^{-\omega} \sum_{\alpha=1}^{\nu} (-1)^\alpha \binom{\nu-1}{\alpha-1} \frac{\omega^\alpha}{\alpha!}.$$

Um über das Verhalten von Ψ_ν bei großem ν Aufschluß zu erhalten, benutzen wir die Darstellung (4.), indem wir als Integrationsweg das Rechteck wählen, dessen vier Ecken den komplexen Zahlen $\frac{1}{2} \pm Ni$, $M \pm Ni$ entsprechen; dabei bedeuten M und N zwei positive Größen, die wir nachher ins Unendliche wachsen lassen wollen. Das Integral kann wie folgt geschrieben werden

$$\int e^{-\omega x} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\nu-1} \frac{dx}{(x-1)^2},$$

und wenn wir beachten, daß auf den Strecken

$$\left(\tfrac{1}{2} + Ni \ldots M + Ni\right), \quad \left(\tfrac{1}{2} - Ni \ldots M - Ni\right), \quad \left(M - Ni \ldots M + Ni\right)$$

das Produkt

$$e^{-\omega x} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\nu-1}$$

für sehr große M und N endlich bleibt, so ist klar, daß die auf diese Strecken entfallenden Teile des Integrals gegen Null konvergieren, falls M und N unendlich groß werden.

Das Integral (4.) ist daher dem geradlinigen von $x = \frac{1}{2} + i\infty$ bis $x = \frac{1}{2} - i\infty$ erstreckten Integral desselben Integranden gleich, und wir haben, indem wir $x = \frac{1}{2} + iy$ setzen, die Darstellung

$$\Psi_\nu(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega\left(\frac{1}{2}+iy\right)} \frac{\left(iy + \frac{1}{2}\right)^{\nu-1}}{\left(iy - \frac{1}{2}\right)^{\nu+1}} dy$$

und dies ist wegen

$$\left| \frac{iy + \frac{1}{2}}{iy - \frac{1}{2}} \right| = 1$$

absolut kleiner als

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega}{2}} \frac{dy}{\left|\frac{1}{2}-iy\right|^2} = \frac{e^{-\frac{\omega}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\frac{1}{4}+y^2},$$

d. h. es bleibt $\Psi_\nu(\omega)$ absolut kleiner als eine von ν unabhängige Größe M.

Ich setze nun $a = a' + a''i$ und mache die Annahme, daß $a' > 1$ ist. Die Rechtfertigung des oben zur Integration von (2ᵃ.) angewandten Verfahrens verlangt den Nachweis, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \int_{1-\varepsilon}^{1} z^\nu (1-z)^{a-1} dz \qquad (\varepsilon > 0)$$

konvergiert und zugleich mit ε unendlich klein wird.

Die absoluten Beträge ihrer Glieder sind offenbar kleiner als diejenigen der Reihe

$$A = \sum_{\nu=0}^{\infty} M \int_{1-\varepsilon}^{1} z^\nu (1-z)^{a'-1} dz,$$

welche wiederum kleiner sind als die der folgenden

$$A' = \sum_{\nu=0}^{\infty} M \int_{0}^{1} z^\nu (1-z)^{a'-1} dz.$$

Diese letztere Reihe ist aber offenbar

$$A' = \sum_{0}^{\infty} \frac{M.\nu!}{a'(a'+1)\dots(a'+\nu)}$$

und konvergiert unter der gemachten Annahme $a' > 1$.

Die Reihen A' und A sind daher konvergent, letztere offenbar gleichmäßig in Bezug auf die Veränderliche ε zwischen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$. Der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon=0} A$$

wird daher nach einem bekannten Satze der Elemente durch direktes Einsetzen von $\varepsilon = 0$ in die Reihe A gewonnen, und dies gibt

$$\lim_{\varepsilon=0} A = 0;$$

hieraus folgt a fortiori

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \int_{1-\varepsilon}^{1} z^\nu (1-z)^{a-1} dz = 0,$$

was eben zu beweisen war.

Im Vorhergehenden ist also die Gleichung (3.) für den Fall, daß der reelle Teil der Veränderlichen a größer als Eins bleibt, streng bewiesen. Die Koeffizienten werden durch (5*.) für $\nu > 0$ in endlicher Form gegeben, wozu noch die Festsetzung

$$\Psi_0(\omega) = e^{-\omega}$$

hinzukommt.

Wegen der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\frac{1}{4} + y^2} = 2\pi$$

kommt noch die Ungleichung

$$(6.) \qquad |\Psi_\nu(\omega)| < e^{-\frac{1}{2}\omega}$$

zum Vorschein, die bei der wirklichen Rechnung behufs Fehlerabschätzung nützlich sein kann.

Schreibt man (3.) in der Gestalt

$$\omega^a Q(-a) - \frac{e^{-\omega}}{a} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \frac{\nu!}{a(a+1)\dots(a+\nu)},$$

so drückt sich die linke Seite vermöge der bekannten Funktionalgleichung

$$a\,Q(-a) = e^{-\omega}\omega^{-a} - Q(1-a)$$

in der Gestalt aus

$$-\frac{\omega^a Q(1-a)}{a},$$

und man hat daher anstelle von (3.) die Entwicklung

$$\omega^a Q(1-a, \omega) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \frac{\nu!}{(a+1)(a+2)\dots(a+\nu)}.$$

Setzen wir also

$$(7.) \qquad G_n(\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \binom{n-1}{\nu-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!},$$

so wird

$$(8.)\qquad Q(1-a,\omega)=\frac{e^{-\omega}}{\omega^a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,G_n(\omega)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)},$$

solange der reelle Teil von a größer als Eins bleibt.

Für wirkliche Rechnung wird diese Entwicklung natürlich erst für größere a brauchbar sein, und zwar gibt dann eine nur geringe Anzahl von Gliedern die gewünschte Annäherung.

Eine andere Entwicklung von $Q(1-a)$, in welcher als Koeffizienten wieder die $G_n(\omega)$ auftreten, gewinnt man auf folgende Art.

Die bekannte Formel

$$\Gamma(a)\,Q(1-a,\omega)=\int_0^{\infty}e^{-\omega(x+1)}\frac{x^{a-1}\,dx}{x+1}$$

geht durch die Substitution

$$x+1=\frac{1}{1-z}$$

über in

$$\Gamma(a)\,Q(1-a,\omega)=\int_0^1 e^{-\frac{\omega}{1-z}}z^{a-1}(1-z)^{-a}\,dz.$$

Diese Gleichung findet statt, solange der reelle Teil von a positiv bleibt; nimmt man aber an, daß derselbe zwischen Null und Eins enthalten ist, so läßt sich die Entwicklung (2.) anwenden und es kommt

$$\Gamma(a)Q(1-a,\omega)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Psi_\nu(\omega)\int_0^1 z^{a+\nu-1}(1-z)^{-a}\,dz.$$

Das im allgemeinen Gliede rechts stehende Integral hat den Wert

$$\frac{\Gamma(a+\nu)\,\Gamma(1-a)}{\Gamma(\nu+1)}=\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+\nu-1)}{\nu!}\,\Gamma(a)\,\Gamma(1-a),$$

und unser Resultat nimmt demnach die Gestalt an:

$$\frac{Q(1-a,\omega)}{\Gamma(1-a)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Psi_\nu(\omega)\frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{\nu!}$$
$$=\Psi_0(\omega)+\Psi_1(\omega)\frac{a}{1}+\Psi_2(\omega)\frac{a(a+1)}{1.2}+\cdots.$$

Hier setze ich nun $a=1-s$ und beachte, daß in unserer Schreibweise

$$\Psi_n(\omega)=-e^{-\omega}G_n(\omega),\quad \Psi_0(\omega)=e^{-\omega};$$

dadurch entsteht die Gleichung

$$(9.)\qquad \frac{e^{\omega}\,Q(s,\omega)}{\Gamma(s)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\omega)\binom{n-s}{n}.$$

Dieselbe wurde allerdings nur unter der Annahme bewiesen, daß der reelle Teil von s zwischen Null und Eins enthalten ist, aber die Reihe konvergiert, sobald der reelle Teil von s positiv ist. Die Konvergenz ist übrigens eine nur sehr langsame, und die Betrachtung entbehrt der Strenge.

Um Sicheres zu gewinnen, ersetzen wir das Integral in der Ausgangsgleichung

$$\Gamma(1-s)\,Q(s,\omega) = \int_0^1 e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz$$

durch ein Schlingenintegral

$$J = \int_{(1,0,1)} e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

Der Integrationsweg ist hier eine geschlossene Linie, welche vom Punkte $z=1$ ausgeht und die Strecke $0\ldots 1$ im positiven Sinne umläuft. Man kann dafür speziell die Sukzession der geraden nördlich von der Achse zu denkenden Strecke $1\ldots\varrho$, des Kreisumfanges (ϱ) mit dem kleinen Halbmesser ϱ um den Nullpunkt herum, und des südlich von der Achse zu denkenden Segments $\varrho\ldots 1$ setzen.

Auf dem Integrationswege bleibt die Funktion

$$e^{-\frac{\omega}{1-z}}(1-z)^{s-1}$$

unzweideutig bestimmt, sobald man die Festsetzung macht, für $(1-z)^{s-1}$ denjenigen Zweig zu wählen, der für unendlich kleine z in 1 übergeht. Was die Funktion z^{-s} betrifft, so setzen wir fest, daß sie auf dem Segment $1\ldots\varrho$ im arithmetischen Sinne genommen wird, also

$$z^{-s} = e^{-s\log z} \text{ und } \log z \text{ reell;}$$

die Fortsetzung längs des Kreises (ϱ) in die Strecke $\varrho\ldots 1$ wird dadurch vollkommen bestimmt, und zwar erhält die Funktion im Punkte z von $\varrho\ldots 1$ am südlichen Ufer den Wert

$$z^{-s}e^{-2s\pi i};$$

demnach wird J sich in folgende Teile spalten:

$$J = \int_1^\varrho e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz + \int_{(\varrho)}^{+} + e^{-2s\pi i} \int_\varrho^1 e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz,$$

wobei das mittlere Integral längs des Kreises (ϱ) zu nehmen ist. Zieht man das erste und das dritte Integral zusammen, so entsteht

$$J = \int_{(\varrho)}^{+} + (e^{-2s\pi i} - 1) \int_\varrho^1 e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

Falls nun der reelle Teil von s zwischen Null und Eins genommen wird, nähert sich das Integral

$$\int_{(\varrho)} e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz$$

zu gleicher Zeit mit ϱ der Null, und wir erhalten bei diesem Grenzübergange $\varrho = 0$ die Gleichung

$$J = (e^{-2s\pi i} - 1)\,\Gamma(1-s)\,Q(s, \omega),$$

hieraus also die wichtige Gleichung

$$\text{(A.)} \qquad \Gamma(1-s)\,Q(s, \omega) = \frac{1}{e^{-2s\pi i} - 1} \int_{(1,0,1)} e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

Dieselbe ist zwar unter der Annahme bewiesen, daß der reelle Teil von s zwischen Null und Eins enthalten ist, sie behält aber ihre Gültigkeit für jedes Gebiet der s-Ebene, in welchem die rechte Seite einen Sinn hat; speziell findet (A.) statt, sobald der reelle Teil von s positiv bleibt; wir werden annehmen, daß derselbe größer als Eins bleibt.

Wir betrachten anstelle von (A.) zunächst die Größe

$$\text{(B.)} \qquad H_r = \frac{1}{e^{-2s\pi i} - 1} \int_{(r,0,r)} e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz,$$

wobei $0 < r < 1$ und der Integrationsweg in $z = r$ beginnt und endigt, sodaß

$$\lim_{r=1} H_r = \Gamma(1-s)\,Q(s, \omega).$$

Nun läßt sich in (B.) die Entwicklung (2.) benutzen, da dieselbe längs des gesamten Integrationsweges $(r, 0, r)$ gleichmäßig konvergiert. Wir erhalten

$$H_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \cdot \frac{1}{e^{-2s\pi i}-1} \int_{(r,0,r)} z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

Nun spalten wir dies in

$$H_r = S_n(r) + R_n(r),$$

wobei n eine feste, hinreichend große ganze Zahl ist und

$$S_n(r) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Psi_\nu(\omega) \frac{1}{e^{-2s\pi i}-1} \int_{(r,0,r)} z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz,$$

$$R_n(r) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \frac{1}{e^{-2s\pi i}-1} \int_{(r,0,r)} z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

Nun ist

$$\lim_{r=1} \int_{(r,0,r)} = \int_{(1,0,1)}$$

also

$$\lim_{r=1} \left\{\frac{1}{e^{-2s\pi i}-1} \int_{(r,0,r)} z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz\right\} = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\nu+1-s)}{\Gamma(\nu+1)},$$

also

$$\text{(C.)} \qquad \lim_{r=1} S_n(r) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Psi_\nu(\omega) \frac{\Gamma(s)\Gamma(\nu+1-s)}{\nu!}.$$

Ferner ist für $\nu \geqq n$, falls n hinreichend groß,

$$\frac{1}{e^{-2s\pi i}-1} \int_{(r,0,r)} z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz = \int_0^r z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz,$$

also

$$R_n(r) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \int_0^r z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

Bedeutet s' den reellen Teil von s, so besteht wegen der oben bewiesenen Tatsache

$$|\Psi_\nu(\omega)| < M$$

die Ungleichung

$$\left|\Psi_\nu(\omega) \int_0^r z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz\right| < M \int_0^1 z^{\nu-s'}(1-z)^{s'-1}\,dz.$$

Damit ist bewiesen, daß die Reihe $R_n(r)$ sich aus Gliedern zusammensetzt, welche absolut kleiner bleiben als die entsprechenden Glieder der Reihe positiver Größen

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} M\frac{\Gamma(\nu+1-s')\Gamma(s')}{\nu!};$$

der asymptotische Wert entfernter Glieder der letzteren ist nun

$$\frac{M\Gamma(s')}{(\nu+1-s')^{s'}},$$

sie ist also konvergent, falls $s'>1$ ist. Damit ist aber die gleichmäßige Konvergenz in Bezug auf r der Reihe $R_n(r)$ bewiesen, und man hat demnach

$$\lim_{r=1} R_n(r)=\sum_{\nu=n}^{\infty}\Psi_\nu(\omega)\int_0^1 z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}dz,$$

was eben die Reihe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\Psi_\nu(\omega)\frac{\Gamma(s)\Gamma(\nu+1-s)}{\nu!}$$

ist.

Durch die vorliegenden Ausführungen ist die Gültigkeit der Gleichung (9.) unter der Annahme, daß der reelle Teil von s größer als Eins bleibt, streng bewiesen.

Wir wollen nun eine Relation ableiten, aus welcher sich eine Entwicklung der Funktion $Q(a,1)$ ergibt, welche in ihren Gliedern die Größen $\Gamma(a+c+ni)$ enthält. Die Kenntnis der letzteren Funktionen würde also zu einer bequemen Bestimmung von $Q(a)$ ausreichen.

Ich betrachte die Funktion der reellen Veränderlichen ξ

$$F(\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a+c+itn+it\xi)}{(c+itn+it\xi)\omega^{c+it(n+\xi)}},$$

wobei ω reell und positiv ist, ebenso wie t, ferner wird auch die Hilfsgröße c reell und positiv vorausgesetzt, und zwar so groß, daß der reelle Teil von $a+c$ positiv ausfällt.

Die Reihe ist offenbar konvergent, und zwar beinahe so intensiv wie eine geometrische mit dem Verhältnis

$$e^{-t\frac{\pi}{2}}.$$

Ferner ist

$$F(\xi+1)=F(\xi);$$

die trigonometrische Entwicklung von $F(\xi)$ kann in der Gestalt

$$F(\xi)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{2m\xi\pi i}$$

angenommen werden, und zwar wird

$$A_m=\int_0^1 F(\xi)e^{-2m\xi\pi i}d\xi.$$

Führt man die Integration an der zugrunde gelegten Reihe $F(\xi)$ aus, so ergibt sich

$$A_m=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a+c+itx)}{c+itx}\,\frac{e^{-2mx\pi i}dx}{\omega^{c+itx}}$$

oder, wenn man x durch $\frac{x}{t}$ ersetzt:

$$A_m=\frac{e^{\frac{2mc\pi}{t}}}{t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a+c+ix)}{c+ix}\,\frac{dx}{\left(\omega e^{\frac{2m\pi}{t}}\right)^{c+ix}}.$$

Setzt man für einen Augenblick

$$\omega_1=\omega e^{\frac{2m\pi}{t}},$$

so kommt alles auf die Bestimmung des Integrals

$$L=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a+c+ix)}{c+ix}\,\frac{dx}{\omega_1{}^{c+ix}}$$

an. Dasselbe geht nach Substitution von

$$\Gamma(a+c+ix)=\int_0^{\infty}e^{-z}z^{a+c+ix-1}dz$$

in das Doppelintegral

$$L=\int_0^{\infty}e^{-z}z^{a-1}dz\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{z}{\omega_1}\right)^{c+ix}\frac{dx}{c+ix}$$

über. Nun ist aber bekanntlich

$$\int_{-\infty}^{\infty}k^{c+ix}\frac{dx}{c+ix}=\begin{cases}2\pi, \text{ wenn } k>1,\\ 0, \text{ wenn } 0<k<1,\end{cases}$$

also bleibt aus unserem Doppelintegral

$$L = 2\pi \int_{\omega_1}^{\infty} e^{-z} z^{a-1}\, dz,$$

d. h. es ist

$$(10.)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+c+ix)}{c+ix}\, \frac{dx}{\omega_1^{c+ix}} = 2\pi\, Q(a, \omega_1).$$

Damit haben wir die Koeffizientendarstellung

$$A_m = \frac{2\pi}{t}\, e^{\frac{2mc\pi}{t}}\, Q\left(a, \omega\, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right),$$

und infolgedessen die Relation

$$(11.)\qquad \begin{cases} \dfrac{2\pi}{t} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2m\pi}{t}(c+it\xi)}\, Q\left(a, \omega\, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right) \\ = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{\Gamma(a+c+itn+it\xi)}{(c+itn+it\xi)\, \omega^{c+itn+it\xi}}. \end{cases}$$

Ich wähle darin $\xi = 0$, $\omega = 1$ und schreibe sie wie folgt

$$\frac{2\pi}{t} Q(a) + \frac{2\pi}{t} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{2mc\pi}{t}}\, Q\left(a, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right) + \frac{2\pi}{t} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2mc\pi}{t}}\, Q\left(a, e^{-\frac{2m\pi}{t}}\right)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+c+int)}{c+int}.$$

Hier läßt sich links die zweite Reihe durch eine schnell konvergierende ersetzen, wenn man die *Euler-Prym*sche Gleichung

$$Q\left(a, e^{-\frac{2m\pi}{t}}\right) = \Gamma(a) - P\left(a, e^{-\frac{2m\pi}{t}}\right)$$

benutzt und die Summation

$$(\mathrm{D.})\qquad \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2mc\pi}{t}}\, P\left(a, e^{-\frac{2m\pi}{t}}\right)$$

mit Hilfe der Darstellung

$$P\left(a, e^{-\frac{2m\pi}{t}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\frac{2m\pi}{t}(a+n)}}{n!\,(a+n)}$$

ausführt; dies liefert die Größe (D.) in der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(a+n)\left(e^{\frac{2\pi}{t}(a+c+n)}-1\right)}.$$

Man erhält daher für die Funktion

$$Q(a) = \int_1^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$$

die Darstellung

$$(12.)\quad \left\{\begin{aligned} Q(a) &= \frac{t}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+c+nti)}{c+nti} \\ &\quad - \frac{\Gamma(a)}{e^{\frac{2c\pi}{t}}-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(a+n)\left(e^{\frac{2\pi}{t}(a+c+n)}-1\right)} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{2mc\pi}{t}} Q\left(a, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right). \end{aligned}\right.$$

Wird hier z. B. $t=1$, $c=1$ genommen, so wird die letzte Reihe rechts einen Wert ergeben, der kleiner als 10^{-230} ist, also ohne weiteres unterdrückt werden kann.

Um hier zur Grenze für $c=0$ überzugehen, beachte ich, daß für unendlich kleine c die rechte Seite von (12.) in

$$\frac{t}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+nti)-\Gamma(a-nti)}{nti} + \frac{t}{2\pi}\,\frac{\Gamma(a+c)}{c}$$

$$-\Gamma(a)\left(\frac{t}{2\pi c}-\frac{1}{2}\right) + \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(a+n)\left(e^{\frac{2\pi}{t}(a+n)}-1\right)} - \sum_{m=1}^{\infty} Q\left(a, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right)$$

übergeht, und somit kommt

$$(13.)\quad \left\{\begin{aligned} Q(a) &= \frac{1}{2}\Gamma(a) + \frac{t}{2\pi}\Gamma'(a) \\ &\quad + \frac{t}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+nti)-\Gamma(a-nti)}{ni} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(a+n)\left(e^{\frac{2\pi}{t}(a+n)}-1\right)} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{m} Q\left(a, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right). \end{aligned}\right.$$

Die vorteilhafteste Wahl der Hilfsgröße t wäre $t=2$.

Eine andere Art Entwicklungen der Q-Funktion sind diejenigen, welche sich der Theorie der Reihe

$$(14.)\qquad \Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-(\omega+x+n)u}}{(\omega+x+n)^s}$$

anschließen. Darunter gehört die wohlbekannte Entwicklung *Hermites**) und diejenige, welche ihr Herr *Mellin***) zur Seite gestellt hat. In der Reihe (14.) wird vorausgesetzt, daß u im reellen Teile positiv ist; ich setze übrigens u reell und positiv voraus.

Führt man an der Reihe (14.) die Integration

$$\int_0^1 \Phi(x)\,dx$$

aus, so erhält man als Integralwert

$$\int_0^{\infty} e^{-(\omega+z)u}\frac{dz}{(\omega+z)^s}\qquad\text{oder}\qquad\int_{\omega}^{\infty} e^{-xu}\frac{dx}{x^s},$$

was man auch so schreiben kann:

$$u^{s-1}\int_{\omega u}^{\infty} e^{-z}\frac{dz}{z^s}.$$

Demnach ist

$$(15.)\qquad \int_0^1 \Phi(x)\,dx=Q(1-s,\,u\omega)\cdot u^{s-1}.$$

Entwickelt man nun die Funktion

$$e^{ux}\Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n+x)^s}$$

nach Potenzen von x, so entsteht

$$e^{ux}\Phi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-s}{m}x^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^{s+m}}.$$

Diese Entwicklung konvergiert im ganzen Intervall $0\leqq x\leqq 1$ gleichmäßig nur dann, wenn $\omega>1$ ist; unter dieser Annahme erhält man, wenn man auf beiden Seiten mit $e^{-ux}dx$ multipliziert und von 0 bis 1 integriert, ver-

---

*) Dieses Journal Bd. 90.

**) Acta math. Bd. 2.

möge (15.) die Relation

$$(16.) \qquad Q(1-s,\, u\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-s}{m} P(m+1,\, u)\, S(s+m),$$

wobei zur Abkürzung

$$(17.) \qquad S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^a u^a}$$

gesetzt wird und die Koeffizienten

$$P(m+1,\, u) = \int_0^u e^{-x} x^m\, dx$$

sich leicht in endlicher Gestalt darstellen lassen. Für $u=1$ geht diese Formel in die *Hermite*sche über.

Ich schreibe nun die Gleichung (15.) in der Gestalt

$$\int_0^1 \Phi(1-x)\, dx = u^{s-1} Q(1-s,\, u\omega),$$

und berechne das Integral, indem ich zunächst die Funktion

$$e^{-ux} \Phi(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n-x)^s}$$

nach Potenzen von x entwickle. Dadurch entsteht

$$\Phi(1-x) = e^{ux} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-s}{m} x^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^{s+m}},$$

eine Reihe, die so schnell konvergiert wie die geometrische mit dem Verhältnis $\frac{x}{\omega+1}$. Die Integration nach x zwischen Null und Eins ergibt

$$(18.) \qquad Q(1-s,\, u\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-s}{m} \mathfrak{P}(m+1,\, u)\, S_1(s+m),$$

wobei die Bezeichnung

$$(19.) \qquad S_1(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^a u^a},$$

und

$$\mathfrak{P}(m+1,\, u) = \int_0^u e^x x^m\, dx$$

gebraucht wird. Letztere Größe läßt sich wieder in geschlossener Form durch Elementarfunktionen ausdrücken, und zwar ist

$$\mathfrak{P}(m+1, u) = (-1)^m m! e^u \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-u)^\nu}{\nu!} - e^{-u} \right\}.$$

Diese Entwicklung (18.), welche ich in den Prager Berichten vom Jahre 1889 auf einem anderen Wege gewonnen habe, geht für $u = 1, \omega = 1$ in die freilich früher publizierte Formel des Herrn *Mellin* über. Da sich letztere nur auf diesen Spezialfall bezieht, in welchem aber die Konvergenz für den wirklichen Gebrauch zu schwach ist, so gebührt der Vorzug doch der *Hermite*schen Entwicklung, da sich letztere für einigermaßen große ω wirklich verwenden läßt.

Es sei nun $k \geqq 2$ eine ganze Zahl und man setze $u\omega = z$, $\omega = k-1$ also

$$u = \frac{z}{k-1}.$$

Setzt man dann

$$(19^a.) \qquad R(a) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-nu}}{n^a},$$

so nimmt (18.) die Gestalt an

$$(18^a.) \qquad Q(1-s, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-s}{m} \frac{\mathfrak{P}(m+1, u)}{u^{m+s}} R(m+s);$$

für kleine u ist der Quotient

$$\frac{\mathfrak{P}(m+1, u)}{u^{m+1}}$$

von $\frac{1}{m+1}$ nur wenig verschieden, also verhält sich der als Koeffizient in (18ª.) vorkommende Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{P}(m+1, u)}{u^{m+s}}$$

ungefähr wie

$$\frac{u^{1-s}}{m+1}.$$

Ist also der reelle Teil von s größer als Eins, so wird man in (18ª.) die Zahlen $R(m+s)$ auf eine Anzahl von Dezimalstellen berechnen müssen, welche mit abnehmendem u wächst; dabei konvergiert die Reihe (19ª.) sehr langsam, wenn u klein wird. Brauchbar wird also unsere Formel (18ª.) doch nur für größere z. Bei ihrer Anwendung hat man zunächst einzelne Glieder der Reihe

$$R(s) = \frac{e^{-ku}}{k^s} + \frac{e^{-(k+1)u}}{(k+1)^s} + \frac{e^{-(k+2)u}}{(k+2)^s} + \cdots$$

zu berechnen; die Glieder der Reihe $R(s+m)$ entstehen aus ihnen durch die Division bezw. mit

$$k^m, (k+1)^m, (k+2)^m, \ldots.$$

Wir schließen unsere Betrachtungen mit einer halbkonvergenten Entwicklung der Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu u}}{(\omega+\mu)^s} = \Psi(\omega, s). \tag{20.}$$

Dieselbe wird bekanntlich durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt, das entsteht, wenn man in

$$\frac{\Gamma(s)}{(\omega+\mu)^s} = \int_0^\infty e^{-(\omega+\mu)x} x^{s-1}\, dx$$

über $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ summiert. Wir setzen voraus, daß $s > 0$. Es kommt

$$\Gamma(s)\, \Psi(\omega, s) = \int_0^\infty \frac{e^{-\omega x} x^{s-1}\, dx}{1 - e^{-u-x}}.$$

Schreibt man ux anstatt x, so kommt

$$u^{-s}\Gamma(s)\, \Psi(\omega, s) = \int_0^\infty \frac{e^{-u\omega x} x^{s-1}}{1 - e^{-u(1+x)}}\, dx. \tag{21.}$$

Hier benutzen wir den bekannten Satz

$$\frac{1}{1-e^{-z}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu-1} + (-1)^p \frac{\Theta B_{p+1}}{(2p+2)!} z^{2p+1},$$

wobei $0 < \Theta < 1$, und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die positiven *Bernoulli*schen Zahlen sind. In unserem Falle ist $z = u(1+x)$ und wir erhalten daher folgende Darstellung der Größe (21.):

$$\begin{aligned} u^{-s}\Gamma(s)\, \Psi(\omega, s) &= \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-u\omega x} \frac{x^{s-1}\, dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u\omega x} x^{s-1}\, dx \\ &+ \sum_1^p (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} u^{2\nu-1} \int_0^\infty e^{-u\omega x} x^{s-1} (1+x)^{2\nu-1}\, dx \\ &+ (-1)^p \frac{B_{p+1}}{(2p+2)!} u^{2p+1} \Theta' \int_0^\infty e^{-u\omega x} x^{s-1} (1+x)^{2p+1}\, dx. \\ &\qquad (0 < \Theta' < 1) \end{aligned}$$

Wird das letzte Glied der rechten Seite mit $(-1)^p R_p$ angedeutet, so ist offenbar R_p positiv und kleiner als der numerische Wert desjenigen Ausdrucks, der als neues Glied zum voranstehenden Aggregat hinzukommen würde, falls man p um eine Einheit wachsen ließe.

Nun ist aber, wie oben bemerkt,

$$\int_0^\infty e^{-vx} \frac{x^{s-1}\,dx}{1+x} = e^v \cdot \Gamma(s)\, Q(1-s, v),$$

und wenn man die Identität

$$(1+x)^{2\nu-1} = \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} x^\alpha$$

benutzt, so kommt

$$\int_0^\infty e^{-u\omega x} x^{s-1} (1+x)^{2\nu-1}\,dx = \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-u\omega x} x^{\alpha+s+1}\,dx,$$

was aber den Wert

$$\sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} \cdot \frac{\Gamma(s+\alpha)}{(u\omega)^{s+\alpha}}$$

hat. Setzt man demnach

$$G(z, s)_\nu = \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} \frac{s(s+1)\dots(s+\alpha-1)}{z^\alpha}, \tag{22.}$$

so erhalten wir aus obiger Gleichung

$$u^{-s}\,\Psi(\omega, s)\, e^{-u\omega} = \frac{1}{u} Q(1-s, u\omega) + \frac{e^{-u\omega}}{2(u\omega)^s}$$
$$+ \frac{e^{-u\omega}}{(u\omega)^s} \sum_{\nu=1,2,3,\dots} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} u^{2\nu-1} G(u\omega, s)_\nu,$$

wobei rechts eine halbkonvergente Reihe steht, in welcher der Rest absolut kleiner bleibt, als das erste vernachlässigte Glied.

Ersetzt man $u\omega$ durch z, so nimmt unsere halbkonvergente Entwicklung die Gestalt an:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-mu-z}}{(mu+z)^s} = \frac{1}{u} Q(1-s, z) \\ &\qquad + \frac{e^{-z}}{2z^s} + \frac{e^{-z}}{z^s} \sum_{\nu=1,2,3,\dots} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} u^{2\nu-1} G(z, s)_\nu. \end{aligned} \right. \tag{23.}$$

Wenn man hier auf beiden Seiten mit u multipliziert, so entsteht eine halbkonvergente Bestimmung von $Q(1-s, z)$ bei positivem reellem s, welche die Berechnung einer einzigen Reihe des *Hermite*schen Typus, nämlich

$$\sum_0^\infty \frac{e^{-mu}}{(mu+z)^s},$$

erfordert. Diese Reihe ist — ins Komplexe übertragen — mit derjenigen identisch, welche *Malmstén* und *Lipschitz* zuerst untersuchten, und die ich unter der Bezeichnung

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{e^{2n x \pi i}}{(w+n)^s}$$

bei verschiedenen Gelegenheiten betrachtet habe, namentlich in meiner Abhandlung über die *Malmstén*schen Reihen, welche sich in den Schriften der Prager Akademie vom Jahre 1891 abgedruckt findet.

Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen.

Von Herrn *J. Schur* in Berlin.

Bekanntlich lassen sich unter den Matrizen

$$(a_{\varkappa\lambda}) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots n)$$

des Grades n auf unendlich viele Arten n^2 linear unabhängige angeben. Jedes solche System $A_0, A_1, \dots A_{n^2-1}$ besitzt dann die Eigenschaft, daß sich jede andere Matrix n-ten Grades A in der Form

$$A = c_0 A_0 + c_1 A_1 + \cdots + c_{n^2-1} A_{n^2-1}$$

darstellen läßt. Da nun für $n > 1$ nicht je zwei Matrizen vertauschbar sind, so kann es für $n > 1$ kein System von n^2 linear unabhängigen Matrizen n-ten Grades geben, von denen je zwei vertauschbar sind. Es entsteht auf diese Weise die Aufgabe, die größtmögliche Anzahl linear unabhängiger, unter einander vertauschbarer Matrizen n-ten Grades zu bestimmen.

Es möge die gesuchte Zahl mit $v_n + 1$ bezeichnet werden. Sind dann

$$A_0, A_1, \dots A_{v_n}$$

$v_n + 1$ vertauschbare Matrizen, die linear unabhängig sind, so muß offenbar jedes der Produkte $A_\beta A_\gamma$ in der Form

$$A_\beta A_\gamma = \sum_{\alpha=0}^{v_n} c_{\alpha\beta\gamma} A_\alpha$$

darstellbar sein, wo die $c_{\alpha\beta\gamma}$ gewisse Konstanten sind. Die Gesamtheit der Matrizen

$$x_0 A_0 + x_1 A_1 + \cdots + x_{v_n} A_{v_n}$$

mit beliebigen Koeffizienten x_ν bildet daher nach der von Herrn *Frobenius**)

*) Theorie der hyperkomplexen Größen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1903, S. 504.

angewandten Bezeichnung eine kommutative Gruppe der Ordnung $v_n + 1$. Die oben gestellte Aufgabe läßt sich mithin auch folgendermaßen formulieren: „Welches ist die größtmögliche Ordnung einer kommutativen Gruppe von Matrizen n-ten Grades?"

Im folgenden wird bewiesen:

I. *Die Ordnung einer kommutativen Gruppe von Matrizen n-ten Grades ist höchstens gleich* $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$.

Hier bedeutet $\left[\frac{n^2}{4}\right]$, wie üblich, die größte ganze Zahl, die $\frac{n^2}{4}$ nicht übertrifft, d. h. für gerades n die Zahl $\frac{n^2}{4}$, für ungerades n die Zahl $\frac{n^2-1}{4}$.

Sind in einer Gruppe $\mathfrak{H}$ von Matrizen n-ten Grades zwei Teilgruppen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ enthalten, die außer der Null kein Element gemeinsam haben, und läßt sich jedes Element von $\mathfrak{H}$ als die Summe eines Elementes von $\mathfrak{H}_1$ und eines Elementes von $\mathfrak{H}_2$ darstellen, so möge $\mathfrak{H}$ als die *Summe**) der Gruppen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ bezeichnet werden. Die aus den Matrizen xE, wo E die Einheitsmatrix n-ten Grades bedeutet, bestehende Gruppe werde mit $\mathfrak{E}_n$ bezeichnet. Ferner soll eine Gruppe eine *Wurzelgruppe***) genannt werden, wenn jedes Element der Gruppe, zu einer gewissen Potenz erhoben, gleich Null wird.

Es gilt dann der weitere Satz:

II. *Jede kommutative Gruppe von Matrizen n-ten Grades, deren Ordnung gleich* $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$ *ist, ist für* $n>3$ *gleich der Summe der Gruppe* $\mathfrak{E}_n$ *und einer Wurzelgruppe der Ordnung* $\left[\frac{n^2}{4}\right]$, *in der das Produkt von je zwei Elementen gleich Null ist.*

Auf Grund dieses Satzes genügt es daher (für $n>3$), die kommutativen Wurzelgruppen der Ordnung $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ zu bestimmen.

Kommutative Wurzelgruppen dieser Ordnung lassen sich für jedes n leicht angeben.

Ist $n=2m$, so bildet die Gesamtheit der Matrizen $(a_{\varkappa\lambda})$, in denen für

$$\varkappa \leqq m \qquad \text{oder} \qquad \lambda > m$$

---

*) Vergl. *Frobenius*, Theorie der hyperkomplexen Größen II, ebenda S. 634.
**) *Frobenius*, a. a. O. S. 635.

die Größe $a_{\varkappa\lambda}$ gleich Null ist, während die übrigen m^2 Größen $a_{\varkappa\lambda}$ beliebig sind, eine solche Gruppe, die ich mit $\mathfrak{A}_n$ bezeichnen will. Ist $n=2m+1$, so kann man (für $m>0$) zwei kommutative Gruppen der Ordnung

$$m^2+m=\left[\frac{n^2}{4}\right]$$

angeben. Die eine Gruppe umfaßt alle Matrizen $(a_{\varkappa\lambda})$, in denen $a_{\varkappa\lambda}=0$ ist, falls

$$\varkappa\leqq m \qquad \text{oder} \qquad \lambda>m$$

ist, die andere Gruppe umfaßt alle Matrizen $(a_{\varkappa\lambda})$, in denen $a_{\varkappa\lambda}=0$ ist, sobald

$$\varkappa\leqq m+1 \qquad \text{oder} \qquad \lambda>m+1$$

ist. Diese beiden Gruppen bezeichne ich mit $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}'_n$.

Ich nenne ferner allgemein zwei Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ von Matrizen n-ten Grades, deren Ordnungen einander gleich sind, *äquivalent,* wenn sich eine Matrix P von nicht verschwindender Determinante bestimmen läßt, so daß für jedes Element A von $\mathfrak{G}$ die Matrix PAP^{-1} in $\mathfrak{H}$ *) enthalten ist. Dann läßt sich der Satz II noch folgendermaßen präzisieren:

III. *Ist $n\neq 3$, so ist jede kommutative Wurzelgruppe der Ordnung $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ von Matrizen n-ten Grades für gerades n der Gruppe $\mathfrak{A}_n$, für ungerades n entweder der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ oder der Gruppe $\mathfrak{A}'_n$ **) äquivalent. — Für $n=3$ ist eine kommutative Wurzelgruppe der Ordnung $\left[\frac{3^2}{4}\right]=2$ entweder der Gruppe $\mathfrak{A}_3$ oder der Gruppe $\mathfrak{A}'_3$ oder auch der durch die Matrizen der Form*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

gebildeten Gruppe äquivalent.

Ich gehe nun an den Beweis der hier ausgesprochenen Sätze.

Da für jedes n die kommutative Gruppe $\mathfrak{E}_n+\mathfrak{A}_n$ die Ordnung $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$ besitzt, so kann die oben definierte Zahl v_n nicht kleiner sein als $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Es sei nun $\mathfrak{M}'$ eine kommutative Gruppe von Matrizen n-ten Grades, deren Ordnung $m+1$ nicht kleiner als $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$ ist, und es möge, was ohne

*) Ich werde im folgenden die Gruppe $\mathfrak{H}$ dann kurz mit $P\mathfrak{G}P^{-1}$ bezeichnen.

**) Die Gruppen $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}'_n$ sind, wie man leicht zeigt, nicht äquivalent.

Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden darf, $\mathfrak{M}'$ die Einheitsmatrix E enthalten.

Ich nehme zunächst an, daß die charakteristischen Wurzeln jeder Matrix A' von $\mathfrak{M}'$ einander gleich sind. Dann läßt sich A' auf die Form

$$A' = A + \alpha E$$

bringen, wo $A^n = 0$ ist. Die Gesamtheit der Matrizen A bildet dann eine Wurzelgruppe $\mathfrak{M}$ der Ordnung m*), und $\mathfrak{M}'$ läßt sich als Summe der Gruppen $\mathfrak{E}_n$ und $\mathfrak{M}$ auffassen.

Es genügt, die Gruppe $\mathfrak{M}$ für sich zu behandeln.

Nun ist offenbar $v_1 = 0 = \left[\frac{1^2}{4}\right]$. Es sei bereits bewiesen, daß es für $n' < n$ keine kommutative Wurzelgruppe von Matrizen des Grades n' gibt, deren Ordnung größer ist als $\left[\frac{n'^2}{4}\right]$.

Nach einem von Herrn *Cartan***) herrührenden Satze läßt sich in jeder Wurzelgruppe ein von Null verschiedenes Element angeben, das mit jedem Element der Gruppe multipliziert, Null ergibt. Es sei M' eine Matrix der Wurzelgruppe $\mathfrak{M}$, welche diese Eigenschaft besitzt. Ich denke mir M' so gewählt, daß der Rang r dieser Matrix möglichst groß wird. Da $M'^2 = 0$ ist, muß bekanntlich $2r \leqq n$ sein; es sei $n = 2r + s$. Man kann dann stets eine Matrix P von nicht verschwindender Determinante so wählen, daß $PM'P^{-1} = M$ die Form

$$M = \begin{pmatrix} N_{rr} & N_{rs} & N_{rr} \\ N_{sr} & N_{ss} & N_{sr} \\ E_r & N_{rs} & N_{rr} \end{pmatrix}$$

annimmt, wo E_r die Einheitsmatrix r-ten Grades, $N_{\varkappa\lambda}$ allgemein die $\varkappa$ Zeilen und λ Spalten enthaltende Nullmatrix bedeutet.***)

Jedes Element X der mit $\mathfrak{M}$ äquivalenten Gruppe $\mathfrak{M}_1 = P\mathfrak{M}P^{-1}$ hat dann, weil $XM = MX = 0$ ist, die Form

$$X = \begin{pmatrix} N_{rs} & N_{rs} & N_{rr} \\ A & B & N_{sr} \\ C & D & N_{rr} \end{pmatrix},$$

---

*) Dies gilt auch dann, wenn die Gruppe $\mathfrak{M}'$ nicht kommutativ ist.

**) Sur les groupes bilinéaires et les systèmes des nombres complexes, Ann. de Toulouse, tome XII, 1898. — Vergl. auch *Frobenius*, a. a. O. S. 639.

***) Vergl. z. B. *Muth*, Theorie der Elementarteiler, S. 152ff.

wo A, B, C, D Matrizen sind, die bezw. s, s, r, r Zeilen und r, s, r, s Spalten enthalten. Ich setze abgekürzt

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A & B & 0 \\ C & D & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun soll aber

$$m \geqq \left[\frac{(2r+s)^2}{4}\right] = r^2 + rs + \left[\frac{s^2}{4}\right]$$

sein. Die Gesamtheit der Matrizen B bildet eine kommutative Wurzelgruppe von Matrizen des Grades s, deren Ordnung b nach unserer Annahme nicht größer sein kann als $\left[\frac{s^2}{4}\right]$. Es sei ferner c die größte Anzahl linear unabhängiger unter den Matrizen C; dann ist $c \leqq r^2$. Man kann nun, wie leicht einzusehen ist, eine Basis der Gruppe $\mathfrak{M}_1$ auf folgende Weise wählen: Zuerst hat man

$$b + c' \leqq b + c \leqq r^2 + \left[\frac{s^2}{4}\right]$$

Elemente der Form

$$(1.) \qquad X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_\alpha & B_\alpha & 0 \\ C_\alpha & D_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad {\scriptstyle (\alpha = 1, 2, \dots b + c')}$$

dann

$$g = m - b - c' \geqq rs$$

Elemente der Form

$$(2.) \qquad Y_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A'_\beta & 0 & 0 \\ 0 & D'_\beta & 0 \end{pmatrix}. \qquad {\scriptstyle (\beta = 1, 2, \dots g)}$$

Es seien unter den Matrizen A'_β genau g_1 linear unabhängig, und zwar seien es etwa die g_1 ersten. Dann lassen sich an Stelle der Basiselemente (2.) die folgenden wählen:

$$(3.) \qquad Y_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A'_\beta & 0 & 0 \\ 0 & D'_\beta & 0 \end{pmatrix}, \qquad {\scriptstyle (\beta = 1, 2, \dots g_1)}$$

$$(4.)\qquad Z_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & D''_\gamma & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots g - g_1)$$

wo die D''_γ gewisse Matrizen mit r Zeilen und s Spalten sind.

Man denke sich nun die $b+c'+g_1$ Matrizen A_α und A'_β neben einander geschrieben. Es entsteht auf diese Weise eine Matrix K, die s Zeilen und $(b+c'+g_1)r$ Spalten enthält. Es sei k $(0 \leqq k \leqq s)$ der Rang der Matrix K.

Wir dürfen annehmen, daß bereits mit Hilfe der k letzten Zeilen von K eine nicht verschwindende Determinante k-ten Grades gebildet werden kann. Dies können wir stets durch eine passende Vertauschung der mittleren s Zeilen und Spalten der Matrizen von $\mathfrak{M}$ erreichen, wodurch die Gruppe $\mathfrak{M}$ in eine ihr äquivalente übergeht, während M ungeändert bleibt.

Es werde $s-k=l$ gesetzt und es seien

$$a_{\varrho 1}, \ldots a_{\varrho l}, \qquad b_{\varrho 1}, \ldots b_{\varrho k}$$

die Elemente der ϱ-ten Spalte von K. Dann lassen sich bekanntlich stets kl Konstanten

$$(5.)\qquad \begin{cases} t_{11}, \ldots t_{1k} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ t_{l1}, \ldots t_{lk} \end{cases}$$

bestimmen, so daß für jedes ϱ

$$a_{\varrho\alpha} = \sum_{\beta=1}^{k} t_{\alpha\beta}\, b_{\varrho\beta} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots l)$$

wird.

Wir bezeichnen nun die Matrix (5.) mit T, die Matrix s-ten Grades

$$\begin{pmatrix} E_l & -T \\ 0 & E_k \end{pmatrix}$$

mit S und die Matrix n-ten Grades

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & E_r \end{pmatrix}$$

mit Q. Ersetzt man dann die Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A & B & 0 \\ C & D & 0 \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{M}$ durch

$$QXQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ SA & SBS^{-1} & 0 \\ C & DS^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

so enthalten die Matrizen SA, wie man ohne Mühe einsieht, in den ersten l Zeilen lauter Nullen.

Wir können annehmen, daß bereits die Matrizen A diese Eigenschaft besitzen. Dann sind also alle $a_{\varrho\alpha}$ gleich Null.

Nun ergibt sich aber aus

$$Z_\gamma X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D''_\gamma A & D''_\gamma B & 0 \end{pmatrix} = XZ_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

daß für jedes A

$$D''_\gamma A = 0$$

ist. Daher ist auch

$$D''_\gamma K = 0. \tag{6.}$$

Weil aber der Rang der in den letzten k Zeilen von K stehenden Matrix gleich k ist, ergibt sich aus (6.), daß in D''_γ die letzten k Spalten lauter Nullen enthalten müssen. Es kommen also speziell in A'_β höchstens rk, in D''_γ höchstens rl von Null verschiedene Elemente vor. Folglich ist

$$g_1 \leqq rk, \qquad g - g_1 \leqq rl,$$

also $g \leqq rs$. Da nun aber $g \geqq rs$ sein soll, ergibt sich

$$g_1 = rk, \qquad g - g_1 = rl, \qquad b = \left[\frac{s^2}{4}\right], \qquad c' = c = r^2.$$

Damit ist zugleich bewiesen, daß m unter der über $\mathfrak{M}'$ gemachten Voraussetzung nicht größer sein kann als $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Wir können aber noch mehr schließen.

Da die rk Matrizen A'_β linear unabhängig sind, und jedes A in den ersten l Zeilen lauter Nullen enthält, muß sich jede Matrix A als lineare homogene Verbindung der A'_β darstellen lassen. Wir können daher die $r^2 + \left[\frac{s^2}{4}\right]$ ersten Elemente unserer Basis so abändern, daß die A_α sämtlich gleich Null werden, d. h. wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_\alpha & 0 \\ C_\alpha & D_\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{7.}$$

ist. Es wird dann

$$X_\alpha Y_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_\alpha A'_\beta & 0 & 0 \\ D_\alpha A'_\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y_\beta X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & D'_\beta B_\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

also ist $D_\alpha A'_\beta = 0$ und folglich auch $D_\alpha K = 0$. Daraus ergibt sich aber, daß die k letzten Spalten von D_α lauter Nullen enthalten müssen. Da nun die rl Matrizen D''_γ linear unabhängig sind, muß sich jedes D_α als lineare homogene Verbindung der D''_γ darstellen lassen.

Wir können daher unsere Basiselemente so transformieren, daß die D_α sämtlich Null werden. Es sei also bereits

$$X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_\alpha & 0 \\ C_\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun erzeugen aber die B_α für sich eine Wurzelgruppe von Matrizen des Grades s, deren Ordnung gleich $\left[\frac{s^2}{4}\right]$ ist. Es muß sich also, falls $\left[\frac{s^2}{4}\right]$ nicht gleich Null ist, nach dem oben erwähnten Satze des Herrn *Cartan* eine lineare Verbindung

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

der X_α angeben lassen, so daß B von Null verschieden ist und, mit jedem B_α multipliziert, Null ergibt. Es wäre aber dann, wie leicht zu sehen ist,

$$M_1 X_\alpha = 0, \qquad M_1 Y_\beta = 0, \qquad M_1 Z_\gamma = 0,$$

also wäre M_1 ein Element von $\mathfrak{M}_1$, das, mit jedem Element der Gruppe multipliziert, Null ergibt. Es besitzt dann für jedes x auch

$$xM + M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ xE_r + C & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dieselbe Eigenschaft. Man kann aber x so wählen, daß die Determinante von xE_r+C nicht Null wird. Ist daher $\left[\frac{s^2}{4}\right]$ nicht Null, also B von der Nullmatrix verschieden, so wäre der Rang von $xM+M_1$ größer als r, was unserer über die Zahl r gemachten Voraussetzung widerspricht.

Es muß also $s=0$ oder $s=1$ sein.

Ist $s=0$, so ist $\mathfrak{M}_1$ mit der Gruppe $\mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}_{2r}$ identisch.

Es sei demnach $s=1$, also $n=2m+1$. Dann ist wegen $k+l=s=1$ entweder $k=1, l=0$ oder $k=0, l=1$.

Es sei zunächst $k=1, l=0$. Dann haben die $rk=r$ linear unabhängigen Matrizen A'_β die Form

$$A'_\beta=(a_{\beta 1},\ a_{\beta 2}, \dots a_{\beta r});$$

ebenso sei

$$D'_\beta=\begin{pmatrix} d_{\beta 1} \\ d_{\beta 2} \\ \vdots \\ d_{\beta r}\end{pmatrix}.$$

Aus $Y_\varkappa Y_\lambda = Y_\lambda Y_\varkappa$ ergibt sich

$$D'_\varkappa A'_\lambda = D'_\lambda A'_\varkappa$$

oder

$$d_{\varkappa\varrho} a_{\lambda\sigma} = d_{\lambda\varrho} a_{\varkappa\sigma}. \qquad (\varkappa, \lambda, \varrho, \sigma = 1, 2, \dots r) \tag{8.}$$

Ist nun $r>1$, so können die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{\varkappa\sigma} & a_{\lambda\sigma} \\ a_{\varkappa\tau} & a_{\lambda\tau}\end{vmatrix}$$

nicht sämtlich verschwinden, da sonst die r Matrizen A'_β nicht linear unabhängig wären. Es sei etwa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix} \neq 0.$$

Dann ergibt sich aus (8.) für $\varrho=1, 2, \dots r$

$$d_{1\varrho} a_{21} = d_{2\varrho} a_{11}, \qquad d_{1\varrho} a_{22} = d_{2\varrho} a_{12},$$

also $d_{1\varrho}=d_{2\varrho}=0$, d. h. $D'_1=D'_2=0$. Man schließt dann auch für einen von 1 und 2 verschiedenen Index μ wegen

$$D'_\mu A'_1 = D'_1 A'_\mu = 0,$$

daß $D'_\mu = 0$ ist. Die Gruppe $\mathfrak{M}_1$ ist daher identisch mit der in der Einleitung definierten Gruppe $\mathfrak{A}_n$.

Ist aber $k = 0$, $l = 1$, so stimmt $\mathfrak{M}_1$ direkt mit der Gruppe $\mathfrak{A}'_n$ überein.

Der Fall $r = 1$ oder $n = 3$ bildet eine Ausnahme. In diesem Falle hat, falls $k = 1$, $l = 0$ und D'_1 nicht gleich Null ist, die von uns betrachtete Basis die Form

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix},$$

wo x, y, z von Null verschiedene Zahlen sind. Setzt man dann

$$R = \begin{pmatrix} yz & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so wird

$$R X_1 R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ xy^{-1}z^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R Y_1 R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gruppe $\mathfrak{M}$ ist daher äquivalent der durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

gebildeten Gruppe.

Damit ist der Satz III vollständig bewiesen.

Es bleibt uns noch übrig, den Fall zu behandeln, daß die Gruppe $\mathfrak{M}'$ der Ordnung $m + 1 \geqq \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$, von der wir ausgegangen sind, auch solche Matrizen enthält, deren charakteristische Gleichungen zwei verschiedene Wurzeln besitzen. Es sei A eine solche Matrix. Dann läßt sich bekanntlich eine Matrix P so wählen, daß $A_1 = PAP^{-1}$ die Form

$$A_1 = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

annimmt, wo G und H zwei Matrizen gewisser Grade g und h bedeuten,

deren charakteristische Gleichungen keine Wurzel gemeinsam haben. Da aber jede Matrix X der Gruppe $P\mathfrak{M}'P^{-1}$ mit A_1 vertauschbar ist, muß nach einem bekannten Satze X die Form

$$X = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

haben, wo Y und Z die Grade g und h besitzen.

Es sei bereits allgemein bewiesen, daß für $n' < n$ die Zahl $v_{n'}$ gleich $\left[\frac{n'^2}{4}\right]$ ist. Die Matrizen Y bilden dann eine kommutative Gruppe, deren Ordnung k nicht größer ist als $\left[\frac{g^2}{4}\right] + 1$; die Matrizen Z bilden ebenso eine Gruppe, deren Ordnung l höchstens gleich $\left[\frac{h^2}{4}\right] + 1$ ist. Es ist aber offenbar

$$m + 1 \leqq k + l.$$

Man erhält also

$$\left[\frac{(g+h)^2}{4}\right] + 1 < m + 1 \leqq k + l \leqq \left[\frac{g^2}{4}\right] + \left[\frac{h^2}{4}\right] + 2.$$

Das ist aber nur dann möglich, wenn $gh \leqq 2$ ist, also nur für $n = 2$ und $n = 3$. Aber auch für diese beiden Fälle ergibt sich, daß m nicht größer sein kann als $\left[\frac{2^2}{4}\right] = 1$, bezw. $\left[\frac{3^2}{4}\right] = 2$.

Für $n > 3$ kommt nur der zuerst behandelte Fall in Betracht. Damit sind auch die Sätze I und II vollständig bewiesen.

Für $n = 2$ kommen noch die Gruppen hinzu, die der Gruppe

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad (a \text{ und } b \text{ beliebig})$$

äquivalent sind, für $n = 3$ die den Gruppen

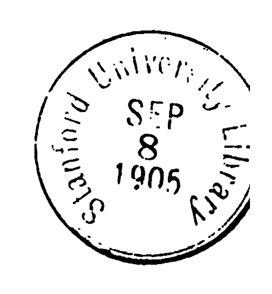
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad (a,\ b \text{ und } c \text{ beliebig})$$

äquivalenten Gruppen.

Band 130. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg a. d. L., Universitätstraße 54.



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

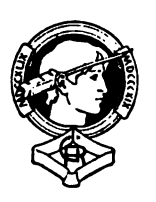
K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 130.

Heft II.

Ausgegeben den 12. August.



Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1905.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Zur Theorie der *Riccati*schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von Herrn *Georg Wallenberg* in Charlottenburg.

*Vessiot**) und der Verf.**) haben diejenige Differentialgleichung zweiter Ordnung untersucht, deren allgemeines Integral eine linear gebrochene Funktion der beiden willkürlichen Konstanten ist:

$$\text{(A.)}\qquad y=\frac{c_1\eta_1+c_2\eta_2+\eta_3}{c_1\zeta_1+c_2\zeta_2+\zeta_3}\qquad (c_1,\, c_2 \text{ willkürliche Konstanten}).$$

Dieselbe hat die Form***)

$$\text{(B.)}\qquad (y+a_0)y''-2y'^2+(b_0+b_1y)y'+d_0+d_1y+d_2y^2+d_3y^3=0;$$

zwischen den 7 Koeffizienten a_0, b_0, b_1, d_0, d_1, d_2, d_3 bestehen zwei Bedingungsgleichungen, so daß sich insbesondere d_0 und d_1 durch die übrigen Koeffizienten und durch die Ableitungen a_0', a'', b_0', b_1' nach z rational ausdrücken lassen.***) Sie läßt sich durch die Substitution $u=\frac{1}{y+a_0}$ in eine „*Riccati*sche Differentialgleichung zweiter Ordnung" transformieren, deren allgemeines Integral, abgesehen von einem nur die unabhängige Variable enthaltenden Faktor, die logarithmische Ableitung des allgemeinen Integrales einer linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung ist.†) Im folgenden soll die Differentialgleichung (B.) selber eine *Riccati*sche Differentialgleichung zweiter Ordnung genannt werden. — Im ersten Teile wird gezeigt, wie die Integration dieser Differentialgleichung bei Kenntnis einiger Partikular-

*) Ann. de Toulouse. IX.

**) Dieses Journ. Bd. 121, S. 210—217.

***) a. a. O. S. 216.

†) a. a. O. S. 215ff.

integrale sich gestaltet; im zweiten Teile werden ihre ersten Integrale einer eingehenderen Untersuchung unterzogen.

I.

a) Kennt man drei Partikularintegrale y_1, y_2, y_3 der Differentialgleichung (B.), so erhält man ihr allgemeines Integral durch zwei Quadraturen. Dasselbe läßt sich nämlich in der Form schreiben

$$y = \frac{c_1 y_1 + c_2 \lambda y_2 + \mu y_3}{c_1 + c_2 \lambda + \mu},$$

und es kommt darauf an, λ und μ zu bestimmen. Durch die Substitution $u = \frac{1}{y + a_0}$ geht die Differentialgleichung (B.) (vergl. S. 77) in eine solche über, deren allgemeines Integral die Form hat

$$u = \frac{c_1 + c_2 \lambda + \mu}{c_1(y_1 + a_0) + c_2 \lambda (y_2 + a_0) + \mu (y_3 + a_0)} = \frac{1}{q} \frac{c_1 u_1' + c_2 u_2' + u_3'}{c_1 u_1 + c_2 u_2 + u_3}.$$

Die durch die obige Substitution transformierte Differentialgleichung (B.) lautet:

$$u'' + [b_1 + (b_0 - b_1 a_0 + 4 a_0') u] u' + \cdots = 0;$$

es ist daher (a. a. O. S. 216)

$$q = \frac{1}{3}(b_0 - b_1 a_0 + 4 a_0').$$

Durch Vergleichung der beiden Ausdrücke für u erhält man nun

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{q}{y_1 + a_0}, \quad \frac{u_2'}{u_2} = \frac{q}{y_2 + a_0}, \quad \frac{u_3'}{u_3} = \frac{q}{y_3 + a_0},$$

$$\lambda = \frac{u_2'}{u_1'}, \quad \mu = \frac{u_3'}{u_1'},$$

also (nach Unterdrückung einer multiplikativen Konstanten)

$$u_k = e^{\int \frac{q}{y_k + a_0} dz}, \quad u_k' = \frac{q}{y_k + a_0} e^{\int \frac{q}{y_k + a_0} dz}; \qquad (k = 1, 2$$

und daher

$$\lambda = \frac{y_1 + a_0}{y_2 + a_0} e^{\frac{1}{3} \int \frac{(b_0 - b_1 a_0 + 4 a_0')(y_1 - y_2)}{(y_1 + a_0)(y_2 + a_0)} dz},$$

$$\mu = \frac{y_1 + a_0}{y_3 + a_0} e^{\frac{1}{3} \int \frac{(b_0 - b_1 a_0 + 4 a_0')(y_1 - y_3)}{(y_1 + a_0)(y_3 + a_0)} dz}.$$

b) Kennt man vier Partikularintegrale y_1, y_2, y_3, y_4 der Differentialgleichung (B.), so erhält man ihr allgemeines Integral *ohne jede Quadratur.* Denn schreibt man dasselbe in der Form

$$y = \frac{y_1 + \gamma\lambda y_2 + \delta\mu y_3}{1 + \gamma\lambda + \delta\mu} \qquad (\gamma, \delta \text{ willkürliche Konstanten}),$$

so ist

$$y_4 = \frac{y_1 + \gamma_4 \lambda y_2 + \delta_4 \mu y_3}{1 + \gamma_4 \lambda + \delta_4 \mu} \qquad (\gamma_4, \delta_4 \text{ numerische Konstanten}).$$

Aus

$$y_4 - y_1 + \gamma_4 \lambda (y_4 - y_2) + \delta_4 \mu (y_4 - y_3) = 0$$

und der daraus durch Differentiation hervorgehenden Gleichung

$$y_4' - y_1' + \gamma_4 \lambda (y_4 - y_2)\left(\frac{y_4' - y_2'}{y_4 - y_2} + \frac{\lambda'}{\lambda}\right) + \delta_4 \mu (y_4 - y_3)\left(\frac{y_4' - y_3'}{y_4 - y_3} + \frac{\mu'}{\mu}\right) = 0$$

ergibt sich

$$\gamma_4 \lambda = \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} \cdot \frac{\dfrac{y_4' - y_1'}{y_4 - y_1} - \dfrac{y_4' - y_3'}{y_4 - y_3} - \dfrac{\mu'}{\mu}}{\dfrac{y_4' - y_3'}{y_4 - y_3} - \dfrac{y_4' - y_2'}{y_4 - y_2} + \dfrac{\mu'}{\mu} - \dfrac{\lambda'}{\lambda}},$$

$$\delta_4 \mu = \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_3} \cdot \frac{\dfrac{y_4' - y_2'}{y_4 - y_2} - \dfrac{y_4' - y_1'}{y_4 - y_1} + \dfrac{\lambda'}{\lambda}}{\dfrac{y_4' - y_3'}{y_4 - y_3} - \dfrac{y_4' - y_2'}{y_4 - y_2} + \dfrac{\mu'}{\mu} - \dfrac{\lambda'}{\lambda}},$$

wobei

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{a_0(y_1' - y_2') + y_1' y_2 - y_1 y_2' + \frac{1}{3}(b_0 + b_1 a_0 + a_0')(y_1 - y_2)}{(y_1 + a_0)(y_2 + a_0)},$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{a_0(y_1' - y_3') + y_1' y_3 - y_1 y_3' + \frac{1}{3}(b_0 + b_1 a_0 + a_0')(y_1 - y_3)}{(y_1 + a_0)(y_3 + a_0)};$$

die numerischen Konstanten γ_4 und δ_4 gehen in die willkürlichen Konstanten γ und δ ein.

c) Will man eine Beziehung erhalten, die der Konstanz des Doppelverhältnisses von vier Integralen einer *Riccati*schen Differentialgleichung erster Ordnung entspricht und weder die Ableitungen der Integrale noch die Koeffizienten der Differentialgleichung (B.) enthält, so ist noch die Kenntnis eines fünften Integrales y_5 notwendig. Diese Beziehung zwischen dem

allgemeinen Integral y und fünf Partikularintegralen y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 lautet

$$\begin{vmatrix} c_1(y-y_1), & c_2(y-y_2), & y-y_3 \\ \gamma_1(y_4-y_1), & \gamma_2(y_4-y_2), & y_4-y_3 \\ y_5-y_1, & y_5-y_2, & y_5-y_3 \end{vmatrix} = 0;$$

darin sind c_1, c_2 willkürliche, γ_1, γ_2 numerische Konstanten.*)

II.

Multipliziert man in (A.) mit dem Nenner herauf und differenziert einmal, so erhält man die beiden Gleichungen

$$c_1(y\zeta_1 - \eta_1) + c_2(y\zeta_2 - \eta_2) = \eta_3 - y\zeta_3,$$
$$c_1(y'\zeta_1 + y\zeta_1' - \eta_1') + c_2(y'\zeta_2 + y\zeta_2' - \eta_2') = \eta_3' - y'\zeta_3 - y\zeta_3';$$

aus diesen ergibt sich

$$c_1 = \frac{a_1 y' + a_{1_0} + a_{1_1} y + a_{1_2} y^2}{a_3 y' + a_{3_0} + a_{3_1} y + a_{3_2} y^2} \equiv \frac{\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{N}_3}, \tag{5.}$$

$$c_2 = \frac{a_2 y' + a_{2_0} + a_{2_1} y + a_{2_2} y^2}{a_3 y' + a_{3_0} + a_{3_1} y + a_{3_2} y^2} \equiv \frac{\mathfrak{N}_2}{\mathfrak{N}_3}. \tag{6.}$$

Darin ist

$$\left\{\begin{aligned} a_1 &= \begin{vmatrix} \zeta_2 & \zeta_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}, \; a_{1_0} = \begin{vmatrix} \eta_2 & \eta_3 \\ \eta_2' & \eta_3' \end{vmatrix}, \; a_{1_1} = \begin{vmatrix} \eta_2' & \eta_3' \\ \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \zeta_2' & \zeta_3' \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}, \; a_{1_2} = \begin{vmatrix} \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_2' & \zeta_3' \\ \end{vmatrix}; \\ a_2 &= \begin{vmatrix} \zeta_3 & \zeta_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix}, \; a_{2_0} = \begin{vmatrix} \eta_3 & \eta_1 \\ \eta_3' & \eta_1' \end{vmatrix}, \; a_{2_1} = \begin{vmatrix} \eta_3' & \eta_1' \\ \zeta_3 & \zeta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \zeta_3' & \zeta_1' \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix}, \; a_{2_2} = \begin{vmatrix} \zeta_3 & \zeta_1 \\ \zeta_3' & \zeta_1' \end{vmatrix}; \\ a_3 &= \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}, \; a_{3_0} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' \end{vmatrix}, \; a_{3_1} = \begin{vmatrix} \eta_1' & \eta_2' \\ \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \zeta_1' & \zeta_2' \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}, \; a_{3_2} = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \zeta_1' & \zeta_2' \end{vmatrix}. \end{aligned}\right. \tag{7.}$$

---

*) Allgemein besteht zwischen $2n$ Integralen einer Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung, deren allgemeines Integral die Form hat

$$y = \frac{\gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2 + \cdots + \gamma_n\eta_n}{\gamma_1\zeta_1 + \gamma_2\zeta_2 + \cdots + \gamma_n\zeta_n},$$

die Beziehung

$$\left|\alpha_{i_k}(y_{n+k} - y_i)\right| = 0; \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

die α_{i_k} sind Konstanten, von denen die der letzten Zeile und Kolonne gleich der Einheit gewählt werden können. (Vergl. *Königsberger*, Math. Ann. 30.)

Daher sind $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ die linken Seiten *Riccati*scher Differentialgleichungen mit den beziehungsweisen Integralen (c willkürliche Konstante):

$$\frac{c\eta_2+\eta_3}{c\zeta_2+\zeta_3}, \quad \frac{c\eta_3+\eta_1}{c\zeta_3+\zeta_1}, \quad \frac{c\eta_1+\eta_2}{c\zeta_1+\zeta_2};$$

es haben also $\mathfrak{R}_1=0$ und $\mathfrak{R}_2=0$ das Integral $\frac{\eta_3}{\zeta_3}=y_3$, $\mathfrak{R}_1=0$ und $\mathfrak{R}_3=0$ das Integral $\frac{\eta_2}{\zeta_2}=y_2$, $\mathfrak{R}_2=0$ und $\mathfrak{R}_3=0$ das Integral $\frac{\eta_1}{\zeta_1}=y_1$ gemeinsam.

Wir schreiben (5.) und (6.) in der Form

$$(8.) \qquad c_1=\alpha_2\frac{y'+\alpha_{1_0}+\alpha_{1_1}y+\alpha_{1_2}y^2}{y'+\alpha_{3_0}+\alpha_{3_1}y+\alpha_{3_2}y^2}\equiv\alpha_2\frac{R_1}{R_3},$$

$$(9.) \qquad c_2=\alpha_1\frac{y'+\alpha_{2_0}+\alpha_{2_1}y+\alpha_{2_2}y^2}{y'+\alpha_{3_0}+\alpha_{3_1}y+\alpha_{3_2}y^2}\equiv\alpha_1\frac{R_2}{R_3}.$$

Die Gleichungen (8.) und (9.) stellen zwei „erste Integrale" der Differentialgleichung (B.) dar. Die 7 Koeffizienten α von (8.) hängen von den 5 Verhältnissen der 6 unabhängigen Größen η, ζ ab; es müssen also zwischen denselben 2 Bedingungsgleichungen bestehen; desgleichen zwischen den Koeffizienten von (9.). Dividiert man (8.) durch (9.) und setzt $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\alpha_3$, $\frac{c_1}{c_2}=c_3$, so müssen auch zwischen den 7 Koeffizienten von

$$(10.) \qquad c_3=\alpha_3\frac{y'+\alpha_{1_0}+\alpha_{1_1}y+\alpha_{1_2}y^2}{y'+\alpha_{2_0}+\alpha_{2_1}y+\alpha_{2_2}y^2}$$

2 Bedingungsgleichungen bestehen. Diese 6 Bedingungsgleichungen sollen im folgenden aufgestellt werden; sie sind sämtlich von einander unabhängig; in der Tat repräsentieren die Koeffizienten von (8.) und (9.) 11 Größen, welche von 5 unabhängigen Größen abhängen, also 6 Bedingungsgleichungen befriedigen müssen.

Die ersten drei Bedingungsgleichungen ergeben sich daraus, daß von den drei *Riccati*schen Differentialgleichungen $R_1=0$, $R_2=0$, $R_3=0$ nach Obigem immer je zwei ein gemeinsames Integral besitzen müssen. Es mögen $R_1=0$ und $R_3=0$ das Integral y_2 gemeinsam haben (dasselbe ist auch ein Integral der Differentialgleichung (B.)); dann wird auch die Gleichung $R_1-R_3=0$ durch $y=y_2$ befriedigt, d. h. y_2 ist Wurzel der quadratischen Gleichung

$$(11.) \qquad L\equiv\delta_{2_0}+\delta_{2_1}y+\delta_{2_2}y^2=0. \qquad (\delta_{2_k}=\alpha_{3_k}-\alpha_{1_k},\ k=0,1,2)$$

Daraus, daß eine Wurzel dieser Gleichung z. B. die Differentialgleichung $R_1 = 0$ befriedigt, ergibt sich leicht eine Bedingungsgleichung zwischen den α. Ebenso ergibt sich die zweite daraus, daß y_1, das gemeinsame Integral von $R_2 = 0$ und $R_3 = 0$, Wurzel der Gleichung

$$\delta_{1_0} + \delta_{1_1} y + \delta_{1_2} y^2 = 0 \qquad (\delta_{1_k} = \alpha_{3_k} - \alpha_{3_k})$$

und die dritte daraus, daß y_3, das gemeinsame Integral von $R_1 = 0$ und $R_2 = 0$, Wurzel der Gleichung $\delta_{3_0} + \delta_{3_1} y + \delta_{3_2} y^2 = 0$ $(\delta_{3_k} = \alpha_{1_k} - \alpha_{2_k})$ ist.

Die übrigen drei Bedingungsgleichungen würden sich nur schwer direkt aus den Gleichungen (7.) bestimmen lassen. Wir schlagen, um sie aufzustellen, folgendes Verfahren ein: Durch logarithmische Differentiation von (8.) und Multiplikation mit $R_1 R_3$ ergibt sich die Gleichung

$$(12.) \qquad R_1' R_3 - R_1 R_3' + \frac{\alpha_2'}{\alpha_2} R_1 R_3 {}^{*)} \equiv L y'' + L_1 y'^2 + M y' + N = 0,$$

welche mit (B.) bis auf einen Faktor übereinstimmen muß. Der Koeffizient von y'' wird

$$(13.) \qquad L \equiv \delta_{2_0} + \delta_{2_1} y + \delta_{2_2} y^2 \equiv \delta_{2_2} \left(y + \frac{\delta_{2_1} - \sqrt{\Delta_2}}{2\delta_{2_2}}\right) \left(y + \frac{\delta_{2_1} + \sqrt{\Delta_2}}{2\delta_{2_2}}\right),$$

worin $\Delta_2 = \delta_{2_1}^2 - 4\delta_{2_0}\delta_{2_2}$ ist. Der Vergleich mit (B.) zeigt, daß die linke Seite von (12.) durch einen der beiden y enthaltenden Faktoren von (13.) — es sei der Faktor $\delta_{2_2} y + \frac{1}{2}(\delta_{2_1} - \sqrt{\Delta_2})$ — teilbar sein muß. Ferner ist der Koeffizient von y'^2 in (12.):

$$L_1 \equiv -\delta_{2_1} + \frac{\alpha_2'}{\alpha_2} - 2\delta_{2_2} y.$$

Der Vergleich mit (B.) zeigt, daß

$$\frac{-2\delta_{2_2} y - \delta_{2_1} + \frac{\alpha_2'}{\alpha_2}}{\delta_{2_2} y + \frac{1}{2}(\delta_{2_1} - \sqrt{\Delta_2})} = -2$$

sein muß; daraus ergibt sich (als erste der drei letzten Bedingungsgleichungen)

$$\frac{\alpha_2'}{\alpha_2} = \sqrt{\Delta_2}, \quad \text{d. h.} \quad \alpha_2 = c\, e^{\int \sqrt{\Delta_2}\, dz}.$$

Die multiplikative Konstante c kann man sich mit der Integrationskonstanten c_1 vereinigt denken und daher gleich 1 voraussetzen. Ferner

---

*) R_1' und R_3' bedeuten die totalen Ableitungen von R_1 und R_3 nach z.

Daraus folgt, daß

$$\sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_1} = \sqrt{\Delta_3}$$

ist, und diese Gleichung lautet in rationaler Form, wenn man berücksichtigt, daß

$$(14.) \qquad \delta_{1_k} + \delta_{2_k} + \delta_{3_k} = 0 \qquad (k=0,1,2)$$

ist,

$$(15.) \qquad (\delta_{1_0}\delta_{2_2} - \delta_{2_0}\delta_{1_2})^2 - (\delta_{1_0}\delta_{2_1} - \delta_{2_0}\delta_{1_1})(\delta_{1_1}\delta_{2_2} - \delta_{2_1}\delta_{1_2}) = 0.$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich auch durch folgende Überlegung. Durch Differentiation von (9.) muß man ebenfalls die Differentialgleichung (B.) erhalten; es müssen daher die linken Seiten der beiden Gleichungen

$$\delta_{1_0} + \delta_{1_1} y + \delta_{1_2} y^2 = 0$$

und

$$\delta_{2_0} + \delta_{2_1} y + \delta_{2_2} y^2 = 0$$

den Faktor $y + a_0$ (vergl. S. 1, Gl. (B.)) gemeinsam haben;*) die Bedingung für eine gemeinsame Lösung stellt aber gerade die Gleichung (15.) dar.

Endlich ergibt sich diese Gleichung auf dem folgenden Wege: Durch Elimination von y' aus (8.) und (9.) muß sich das Integral (A.) der Differentialgleichung (B.) ergeben; man erhält eine quadratische Gleichung

$$p y^2 + q y + r = 0,$$

in welcher die Koeffizienten p, q, r lineare Funktionen der beiden Integrationskonstanten c_1 und c_2 sind. Soll y die Form (A.) haben, so muß die Diskriminante

$$D = q^2 - 4pr$$

das vollständige Quadrat einer linearen Funktion von c_1 und c_2 sein. Daraus ergeben sich drei Bedingungsgleichungen, welche unter Berücksichtigung von (14.) in die eine Gleichung (15.) zusammenschmelzen.

Die im zweiten Abschnitt gewonnenen Resultate können wir in die folgenden Sätze zusammenfassen:

---

*) Aus dieser Tatsache, sowie aus (14.) folgt noch die bemerkenswerte Beziehung $\delta_{1_2} y_1 + \delta_{2_2} y_2 + \delta_{3_2} y_3 = 0$, also wegen $\delta_{1_2} + \delta_{2_2} + \delta_{3_2} = 0$:

$$y_2 - y_3 : y_3 - y_1 : y_1 - y_2 = \alpha_{2_2} - \alpha_{3_2} : \alpha_{3_2} - \alpha_{1_2} : \alpha_{1_2} - \alpha_{2_2}.$$

I. *Ist $y = \eta$ ein Partikularintegral der Differentialgleichung* (B.), *so nimmt diese durch Multiplikation mit dem Faktor $\lambda(y-\eta)$, wo λ nur von z abhängt, die Gestalt an:*

$$\mathfrak{R}_3^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_3}\right) = 0,$$

woraus sich ein erstes Integral derselben von der Form

$$c_1 = \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_3}$$

ergibt: $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_3$ bedeuten darin die linken Seiten zweier Riccatischen Differentialgleichungen, welche das gemeinsame Integral $y = \eta$ besitzen.

II. *Damit*

$$c_1 = \alpha_2 \frac{y' + \alpha_{1_0} + \alpha_{1_1} y + \alpha_{1_2} y^2}{y' + \alpha_{3_0} + \alpha_{3_1} y + \alpha_{3_2} y^2} \equiv \alpha_2 \frac{R_1}{R_3}$$

ein erstes Integral einer Differentialgleichung (B.) *sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

a) *die Riccatischen Differentialgleichungen $R_1 = 0$ und $R_3 = 0$ ein gemeinsames Integral besitzen; dasselbe ist eine Wurzel der Gleichung*

$$\delta_{2_0} + \delta_{2_1} y + \delta_{2_2} y^2 = 0, \qquad (\delta_{2_k} = a_{3_k} - a_{1_k}, \quad k = 0, 1, 2)$$

b) $\alpha_2 = e^{\int \sqrt{\Delta_2}\, dz}$, *wo $\Delta_2 = \delta_{2_1}^2 - 4\delta_{2_0}\delta_{2_2}$ ist und $\sqrt{\Delta_2}$ dasselbe Vorzeichen wie in der gemeinsamen Lösung unter* **a)** *hat.*

Da (A.) das allgemeine Integral von (B.) ist, können wir diesen Satz auch in folgender Form aussprechen:

III. *Damit das allgemeine Integral der Differentialgleichungsschar*

$$\alpha_2 R_1 - c_1 R_3 = 0$$

oder der mit dem konstanten Parameter c_1 behafteten Riccatischen Differentialgleichung

$$y'(\alpha_2 - c_1) + (\alpha_2 \alpha_{1_0} - c_1 \alpha_{3_0}) + (\alpha_2 \alpha_{1_1} - c_1 \alpha_{3_1}) y + (\alpha_2 \alpha_{1_2} - c_1 \alpha_{3_2}) y^2 = 0$$

eine linear gebrochene Funktion des Parameters c_1 sei, sind **a)** *und* **b)** *die notwendigen und hinreichenden Bedingungen.*

IV. *Zwischen den Koeffizienten zweier ersten Integrale der Differentialgleichung* (B.)

$$c_1 = \alpha_2 \frac{y' + \alpha_{1_0} + \alpha_{1_1} y + \alpha_{1_2} y^2}{y' + \alpha_{3_0} + \alpha_{3_1} y + \alpha_{3_2} y^2} \equiv \alpha_2 \frac{R_1}{R_3},$$

$$c_2 = \alpha_1 \frac{y' + \alpha_{2_0} + \alpha_{2_1} y + \alpha_{2_2} y^2}{y' + \alpha_{3_0} + \alpha_{3_1} y + \alpha_{3_2} y^2} \equiv \alpha_1 \frac{R_2}{R_3}$$

bestehen 6 Bedingungsgleichungen: die drei ersten werden dadurch geliefert, daß von den drei Riccatischen Differentialgleichungen $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $R_3 = 0$ *je zwei ein Partikularintegral gemeinsam haben, welches Wurzel einer quadratischen Gleichung*

$$\delta_{k_0} + \delta_{k_1} y + \delta_{k_2} y^2 = 0 \qquad (k=1,2,3)$$

ist. Ferner ist

$$\alpha_1 = e^{\int \sqrt{\Delta_1}\, dz}, \qquad \alpha_2 = e^{\int \sqrt{\Delta_2}\, dz}$$

und

$$(\delta_{1_0}\delta_{2_2} - \delta_{2_0}\delta_{1_2})^2 - (\delta_{1_0}\delta_{2_1} - \delta_{2_0}\delta_{1_1})(\delta_{1_1}\delta_{2_2} - \delta_{2_1}\delta_{1_2}) = 0.$$

Diese 6 Bedingungsgleichungen stellen gleichzeitig die Relationen zwischen den Determinantenausdrücken (7.) *dar.*

Spezialfälle.

I. $\Delta_2 = 0$, **also** $\alpha_2 = 1$.

In diesem Falle lautet das erste Integral

$$c_1 = \frac{y' + \alpha_{1_0} + \alpha_{1_1} y + \alpha_{1_2} y^2}{y' + \alpha_{3_0} + \alpha_{3_1} y + \alpha_{3_2} y^2} \equiv \frac{R_1}{R_3}. \tag{16.}$$

Ferner ist

$$L(y) \equiv \delta_{2_0} + \delta_{2_1} y + \delta_{2_2} y^2 = \delta_{2_2}(y - \eta)^2.$$

In der durch Differentiation von (16.) sich ergebenden Differentialgleichung

$$R_1' R_3 - R_1 R_3' \equiv L y'' + L_1 y'^2 + M y' + N = 0$$

sind M **und** N **(vergl. S. 82) ebenso wie** L_1 *von selber* **durch** $y - \eta$ **teilbar, auch** *ohne* **daß die** *Riccati***schen Differentialgleichungen** $R_1 = 0$ **und** $R_3 = 0$ **ein gemeinsames Partikularintegral besitzen.*) Trotzdem muß, wie aus den Gleichungen (7.) hervorgeht, diese letztere Bedingung auch im Falle** $\Delta_2 = 0$

---

*) Es ist

$$N \equiv \frac{\partial P_1}{\partial z} P_3 - P_1 \frac{\partial P_3}{\partial z} + \sqrt{\Delta_2}\, P_1 P_3,$$

also

$$N(\eta) \equiv \sqrt{\Delta_2}\, P_1(\eta) R_1(\eta).$$

erfüllt sein, wenn das allgemeine Integral von (16.) die Form (A.) besitzen soll. Ein einfaches Beispiel möge dies erläutern. Für das erste Integral

$$c_1 = \frac{y' + 2y^2 - 1}{y' + y^2 - 1}$$

der Differentialgleichung

$$y y'' - 2y'^2 + 2y' = 0$$

ist $L \equiv y^2$, **also** $\Delta = 0$; **aber die beiden** *Riccati***schen Gleichungen**

$$y' + 2y^2 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad y' + y^2 - 1 = 0$$

besitzen kein gemeinsames Integral. In der Tat hat das allgemeine Integral *nicht* **die Form (A.); es lautet:**

$$y = k \frac{e^{\frac{2z}{k}} - c_2}{e^{\frac{2z}{k}} + c_2},$$

wenn

$$k = \sqrt{\frac{c_1 - 1}{c_1 - 2}}$$

gesetzt wird.

Die fragliche Bedingung lautet nun in unserem Falle: „$y = -\frac{1}{2}\frac{\delta_{2_1}}{\delta_{2_2}}$ **muß Integral von** $R_1 = 0$ **und** $R_3 = 0$ **sein"; daraus ergeben sich die expliziten Bedingungsgleichungen:**

$$\alpha_{1_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_{2_1}}{\delta_{2_2}}\right)' + \frac{1}{2}\alpha_{1_1}\frac{\delta_{2_1}}{\delta_{2_2}} - \frac{1}{4}\alpha_{1_2}\left(\frac{\delta_{2_1}}{\delta_{2_2}}\right)^2,$$

$$\alpha_{3_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_{2_1}}{\delta_{2_2}}\right)' + \frac{1}{2}\alpha_{3_1}\frac{\delta_{2_1}}{\delta_{2_2}} - \frac{1}{4}\alpha_{3_2}\left(\frac{\delta_{2_1}}{\delta_{2_2}}\right)^2,$$

deren Folge $\Delta_2 = 0$ **ist. — Da in diesem Falle** $y = -a_0$ **ein Integral der Differentialgleichung (B.) ist, besteht zwischen ihren Koeffizienten die Beziehung**

$$2a_0'^2 + (b_0 - b_1 a_0)a_0' - d_0 + d_1 a_0 - d_2 a_0^2 + d_3 a_0^3 = 0.$$

II. $\alpha_{1_2} = \alpha_{3_2} = 0$, **also** $\Delta_2 = (\alpha_{1_1} - \alpha_{3_1})^2$.

In diesem Falle wird

$$c = e^{\int(\alpha_{1_1} - \alpha_{3_1})dz} \frac{y' + \alpha_{1_0} + \alpha_{1_1} y}{y' + \alpha_{3_0} + \alpha_{3_1} y}.$$

Die zweite Bedingungsgleichung fällt fort, da die beiden Differentialgleichungen $y' + \alpha_{1_0} + \alpha_{1_1} y = 0$ und $y' + \alpha_{3_0} + \alpha_{3_1} y = 0$ von selber das Integral $y = \infty$ oder genauer die durch $y = \frac{1}{u}$ transformierten Differentialgleichungen

$$-u' + \alpha_{1_0} u^2 + \alpha_{1_1} u = 0 \quad \text{und} \quad -u' + \alpha_{3_0} u^2 + \alpha_{3_1} u = 0$$

das Integral $u = 0$ gemeinsam haben. In der Tat lautet das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y' + \frac{\alpha_{1_1} e^{\int \alpha_{1_1} dz} - c\, \alpha_{3_1} e^{\int \alpha_{3_1} dz}}{e^{\int \alpha_{1_1} dz} - c e^{\int \alpha_{3_1} dz}}\, y + \frac{\alpha_{1_0} e^{\int \alpha_{1_1} dz} - c\, \alpha_{3_0} e^{\int \alpha_{3_1} dz}}{e^{\int \alpha_{1_1} dz} - c e^{\int \alpha_{3_1} dz}} = 0:$$

$$y = \frac{c_1 - \int \alpha_{1_0} e^{\int \alpha_{1_1} dz} dz + c \int \alpha_{3_0} e^{\int \alpha_{3_1} dz} dz}{e^{\int \alpha_{1_1} dz} - c e^{\int \alpha_{3_1} dz}},$$

ist also linear gebrochen in c.

Rotationsflächen verbiegbar sind; seit 1697 haben sich, durch *Johann Bernoulli* angeregt, die Geometer mit den kürzesten Linien auf den Rotationsflächen beschäftigt, ohne daß freilich der Gegenstand als erschöpft anzusehen wäre. Flächen, bei denen eine solche Vereinfachung nicht eintritt, sind erst neuerdings von dem Verfasser dieser Abhandlung betrachtet worden.*) Diese Betrachtungen zu vervollständigen und weiterzuführen, ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung.

2.

Der Ausgangspunkt meiner früheren Betrachtungen war ein Theorem von Herrn *Staude***), auf das ich zunächst eingehen muß.

Es handelt sich um ein Umkehrproblem zwischen zwei Paaren von reellen Veränderlichen x, y und u, v, die mit einander durch die beiden Gleichungen verknüpft sind:

$$(\mathrm{B.})\quad \begin{cases} x = \int_a^u \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}} + \int_b^v \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)h(v)}}, \\ y = \int_a^u \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)g(u)}} + \int_b^v \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)k(v)}}. \end{cases}$$

Hierin sind die Funktionen $\varphi(u)$, $\chi(u)$, $f(u)$, $g(u)$; $\psi(v)$, $\omega(v)$, $h(v)$, $k(v)$ für alle Werte der Veränderlichen u und v, die dem durch die Ungleichheiten

$$a \leq u \leq A, \qquad b \leq v \leq B$$

erklärten Gebiete $\mathfrak{G}$ der uv-Ebene angehören, folgenden Bedingungen unterworfen, die Herr *Staude* teils ausdrücklich festsetzt, teils stillschweigend voraussetzt:

1. Sie sollen in $\mathfrak{G}$ sämtlich eindeutig, endlich und stetig sein.

2. Die Funktionen $f(u)$, $g(u)$; $h(v)$, $k(v)$ sollen darin beständig positiv sein und niemals verschwinden.

3. Die Funktionen $\varphi(u)$, $\chi(u)$; $\psi(v)$, $\omega(v)$ sollen darin ihr Vorzeichen niemals wechseln. Sie dürfen in einzelnen Punkten verschwinden, aber nicht für alle Punkte eines noch so kleinen Intervalles Null werden.

*) *Zur Theorie der geodätischen Linien,* Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 11 (1901), S. 121—129.

**) Math. Ann. 29 (1887), S. 469—485; vergl. auch dieses Journal, 105 (1890), S. 298—328.

4. Die Determinante

$$D(u, v) = \varphi(u)\omega(v) - \chi(u)\psi(v)$$

soll in $\mathfrak{S}$ beständig positiv oder beständig negativ sein und niemals verschwinden.

Unter diesen Voraussetzungen werden, wie Herr *Staude* beweist, durch die Gleichungen (B.) umgekehrt u und v als eindeutige, endliche und stetige Funktionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente x und y definiert, die überdies doppelt periodisch sind mit den Periodenpaaren

$$2\,\omega_{11} = 2\int_a^A \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}}, \quad 2\,\omega_{12} = 2\int_a^A \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)g(u)}}$$

und

$$2\,\omega_{21} = 2\int_b^B \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)h(v)}}, \quad 2\,\omega_{22} = 2\int_b^B \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)k(v)}};$$

den Wurzeln ist das positive Vorzeichen zu geben.

Um das Theorem von Herrn *Staude* für die Gleichungen (A.) nutzbar zu machen, wird man das Umkehrproblem heranziehen:

$$\text{(C.)} \quad \begin{cases} x = \displaystyle\int_a^u \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} + \int_b^v \frac{-V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}}, \\ y = \displaystyle\int_a^u \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} + \int_b^v \frac{-dv}{\sqrt{\alpha - V}}. \end{cases}$$

Hat man nämlich aus den Gleichungen (C.) umgekehrt u und v als Funktionen von x und y bestimmt, so braucht man nur für x eine geeignete lineare Funktion der Zeit t, für y eine geeignete Konstante einzusetzen, um Funktionen u und v von t zu erhalten, die den Gleichungen (A.) genügen. Auf diese Weise ergibt sich eine Parameterdarstellung für die geodätischen Linien der Flächen mit einem Linienelement vom *Liouville*schen Typus, die sich für die Diskussion ihres Verlaufes in vielen Fällen als sehr nützlich erweist.

Damit die Gleichungen (B.) in die Gleichungen (C.) übergehen, hat man zu setzen

$$\varphi(u) = U(u), \ \chi(u) = 1; \ \psi(v) = -V(v), \ \omega(v) = -1;$$
$$U(u) - \alpha = (u-a)(A-u)f(u) = (u-a)(A-u)g(u),$$
$$\alpha - V(v) = (v-b)(B-v)h(v) = (v-b)(B-v)k(v).$$

Jetzt kommt alles darauf an, ob die so erhaltenen Funktionen

$$\varphi(u), \ \chi(u); \ f(u), \ g(u); \ \psi(v), \ \omega(v); \ h(v), \ k(v)$$

die Bedingungen erfüllen, die ihnen bei dem Theorem von Herrn *Staude* aufzuerlegen sind.

3.

Die folgenden Untersuchungen gestalten sich einfacher, wenn man statt der Fläche ihre konforme Abbildung auf die Ebene betrachtet, die sich vermöge der Parameterkurven $u =$ konst. und $v =$ konst. ergibt. Allerdings muß hinterher gezeigt werden, wie die in der uv-Ebene gewonnenen Ergebnisse auf die Fläche selbst zu übertragen sind; hierauf werde ich später zurückkommen. Den geodätischen Linien der durch das Linienelement ds charakterisierten Flächen entsprechen gewisse Bildkurven in der uv-Ebene, die ich kurz als *G-Kurven* bezeichnen will; diese G-Kurven werden durch die Gleichungen (A.) gegeben.

Was zunächst die Bedingung 1) betrifft, so sind die Funktionen $U(u)$ und $V(v)$ sicher eindeutig, denn der Ausdruck

$$ds^2 = [U(u) - V(v)](du^2 + dv^2)$$

soll das Quadrat des Linienelementes einer Fläche darstellen. Dagegen kann die Endlichkeit und Stetigkeit in gewissen Punkten und Kurven der uv-Ebene aufhören, die markiert werden mögen.

Ebenso wird man wegen der Bedingung 3) diejenigen Geraden $u =$ konst. und $v =$ konst. markieren, in denen $U(u)$ und $V(v)$ mit Zeichenwechsel verschwinden, und dasselbe gilt für die etwa vorhandenen, von zwei der u- oder v-Achse parallelen Geraden begrenzten Flächenstreifen, in denen eine dieser Funktionen verschwindet.

In jedem von markierten Punkten freien Gebiete der uv-Ebene sind dann die Bedingungen 1) und 3) erfüllt.

Die Bedingung 2) erfordert zunächst, daß die Gleichungen

$$U(u) - \alpha = 0, \qquad \alpha - V(v) = 0$$

bei geeigneter Wahl der Konstanten α beide mindestens zwei reelle einfache Wurzeln besitzen. Diese Forderung ist nicht immer erfüllt. Das zeigt das einfache Beispiel:

$$U(u) = 3 + \sin u, \qquad V(v) = \sin v,$$

denn für reelle Werte von u und v kann niemals

$$3 + \sin u = \sin v$$

sein. Die Bedingung 2) bedeutet demnach eine wirkliche Beschränkung in der Wahl der Funktionen $U(u)$ und $V(v)$.

Daß die Gleichungen

$$U(u) - \alpha = 0, \qquad \alpha - V(v) = 0$$

für ein gewisses Intervall von Werten der Konstanten α mindestens zwei reelle, einfache Wurzeln besitzen, ist jedoch noch nicht ausreichend. Damit die Bedingung 2) erfüllt ist, müssen außerdem die Quotienten

$$\frac{U(u)-\alpha}{(u-a)(A-u)} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha - V(v)}{(v-b)(B-v)}$$

für $a \leqq u \leqq A$ und $b \leqq v \leqq B$ stets positive Werte haben. Daß dies eine neue Forderung ist, zeigt das Beispiel

$$U(u) = u^2, \qquad V(v) = v^2.$$

Wenn in dem Rechteck $\mathfrak{R}$ mit den Ecken

$$a, b \qquad a, B \qquad A, b \qquad A, B,$$

die Grenzen eingeschlossen, keiner der markierten Punkte liegt, so sind die drei ersten Bedingungen für die Gültigkeit des Theorems von Herrn *Staude* erfüllt. Ein einfaches Beispiel, in dem dies zutrifft, ist etwa die Annahme

$$U(u) = -u^2, \qquad V(v) = v^2 - 1,$$

bei der α zwischen -1 und 0 liegen muß.

Die Bedingung 4) besagt in dem vorliegenden Falle, daß der Ausdruck

$$U(u) - V(v)$$

in $\mathfrak{R}$ beständig positiv oder beständig negativ sein soll und niemals verschwinden darf. Da ds^2 für reelle Punkte einer Fläche niemals negativ sein kann, gilt die Ungleichheit

$$U(u) - V(v) \geqq 0$$

in dem durch die konforme Abbildung der Fläche auf der uv-Ebene erhaltenen Gebiete, das unter Umständen auch die ganze uv-Ebene umfassen kann. Zu den Punkten, in denen

$$U(u) - V(v) = 0$$

ist, gehören aber die vier Ecken des Rechteckes $\mathfrak{R}$, denn aus den Gleichungen

$$U(a) - \alpha = 0, \qquad \alpha - V(b) = 0,$$
$$U(A) - \alpha = 0, \qquad \alpha - V(B) = 0$$

folgt

$$U(a) = U(A) = V(b) = V(B).$$

Das bedeutet jedoch, *daß die Bedingung* 4) *bei den Gleichungen* (C.) *niemals erfüllt ist, sodaß sich auf sie das Theorem von Herrn Staude nicht anwenden läßt**).

4.

Der soeben auseinandergesetzte Sachverhalt hat mich veranlaßt, zu untersuchen, ob sich die Bedingung 4) nicht durch eine andere, weniger fordernde ersetzen lasse. In der Abhandlung: *Über eine Gattung n-fach periodischer Funktionen von n reellen Veränderlichen***) habe ich gezeigt, daß in der Tat das Theorem von Herrn *Staude* gültig bleibt, wenn der Ausdruck $D(u, v)$ in dem Rechteck $\mathfrak{R}$ das Vorzeichen niemals wechselt und, als Funktion von u angesehen, bei beliebigem v, als Funktion von v angesehen, bei beliebigem u nicht für alle Punkte eines noch so kleinen Intervalles gleich Null ist. Die „erweiterte Bedingung 4)" kann aber bei den Gleichungen (C.) in dem Rechteck $\mathfrak{R}$ sehr wohl erfüllt sein.

Um zu untersuchen, ob das der Fall ist, hat man die Punkte der uv-Ebene zu betrachten, in denen

$$U(u) - V(v) = 0$$

ist. Dabei ist zunächst zu bemerken, daß $U(u) - V(v)$ niemals ohne Zeichenwechsel verschwindet. Gäbe es nämlich in der uv-Ebene eine Kurve, in der diese Differenz ohne Zeichenwechsel verschwände, so müßten die Funktionen $U(u)$ und $V(v)$ für die betreffenden Intervalle der Werte von u und v in allen Punkten ein Extremum besitzen, und das ist unmöglich. Wohl aber kann es einzelne Punkte geben, in denen $U - V$ verschwindet, und Kurven, in denen diese Differenz mit Zeichenwechsel gleich Null wird. Wenn die Bedingung 2) für ein ganzes Intervall von Werten der Konstanten α erfüllt ist, gibt es stets solche Kurven; denn a, A und b, B werden dann Funktionen von α, und durch die Gleichungen

---

*) Diesen Umstand hatte ich in meiner oben angeführten Abhandlung übersehen; die in ihr enthaltenen Sätze sind jedoch, wie sich aus dem Folgenden ergeben wird, ausnahmslos richtig.

**) Dieses Journal, Bd. 128, S. 222—242.

$$\begin{cases} u = a(\alpha) \\ v = b(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} u = a(\alpha) \\ v = B(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} u = A(\alpha) \\ v = b(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} u = A(\alpha) \\ v = B(\alpha) \end{cases}$$

werden Kurven dargestellt, in denen $U - V$ verschwindet. Bei dem vorher angeführten Beispiel, wo

$$U(u) = -u^2, \qquad V(v) = v^2 - 1$$

war, sind diese Kurven die vier Quadranten des mit dem Halbmesser 1 um den Anfangspunkt der Koordinaten beschriebenen Kreises.

Soll das erweiterte Theorem von Herrn *Staude*, nachdem die Bedingungen 1), 2) und 3) erfüllt sind, anwendbar sein, so darf kein Teil der Kurven $U - V = 0$ im Innern des Rechteckes $\mathfrak{R}$ liegen, denn sonst würde $D(u, v)$ darin mit Zeichenwechsel verschwinden. Von besonderem Interesse werden daher diejenigen Linienelemente sein, bei denen die den Kurven $U - V = 0$ eingeschriebenen Rechtecke $\mathfrak{R}$ stets die eben aufgestellte Forderung befriedigen. Das wird der Fall sein, wenn die Gleichung $U - V = 0$ einen geschlossenen Kurvenzug darstellt, der von jeder der Geraden $u =$ konst. und $v =$ konst., die ihn überhaupt schneiden, in genau zwei Punkten geschnitten wird. Einen solchen geschlossenen Kurvenzug will ich ein *Oval* nennen. Im folgenden sollen nun die geodätischen Linien derjenigen Flächen untersucht werden, deren Linienelement den *Liouville*schen Typus hat, und wo durch die Gleichung $U - V = 0$ ein Oval dargestellt wird, in dessen Innern $U - V$ positiv ist.

5.

Ein durch die Gleichung

$$U(u) - V(v) = 0$$

dargestelltes *Oval* besitzt bemerkenswerte Eigenschaften.

Die Gerade $u = a$ möge das Oval in den Punkten a, b und a, B schneiden, sodaß

$$U(a) - V(b) = 0, \quad U(a) - V(B) = 0$$

ist. Die Gerade $v = b$ schneidet das Oval in dem Punkte a, b und in einem zweiten Punkte, der mit A, b bezeichnet werde. Dann ist

$$U(A) - V(b) = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt nun, daß auch

$$U(A) - V(B) = 0$$

ist; hierin liegt aber, daß die Geraden $u=A$ und $v=B$ beide das Oval in dem Punkte A, B schneiden, sodaß ein dem Oval eingeschriebenes Rechteck $\mathfrak{R}$ mit den Ecken

$$a, b \qquad a, B \qquad A, b \qquad A, B$$

entsteht.

Wird jetzt

$$U(a) = U(A) = V(b) = V(B) = \alpha$$

gesetzt, so sind die Gleichungen

$$U(u) - \alpha = 0, \quad \alpha - V(v) = 0$$

für $u = a, A$ und $v = b, B$ erfüllt.

Die Forderung, daß a, A und b, B einfache Wurzeln seien, läßt sich geometrisch deuten, wenn man voraussetzt, wie das von jetzt ab geschehen soll, daß das Oval in jedem Punkte eine bestimmte Tangente besitzt. Sie besagt dann, daß die Tangenten des Ovals in den vier Eckpunkten des Rechteckes $\mathfrak{R}$ weder der u-Achse noch der v-Achse parallel sein dürfen. Man wird daher das Oval der weiteren Beschränkung unterwerfen müssen, daß die Geraden u = konst. und v = konst., die das Oval in zwei von einander verschiedenen Punkten treffen, niemals gleichzeitig Tangenten des Ovals sein dürfen. Unter den Geraden u = konst. und v = konst. wird es allerdings immer mindestens zwei, und in dem vorliegenden Falle genau zwei geben, die das Oval berühren. In diesen Punkten wird beziehungsweise $b = B$ und $a = A$; das zu ihnen gehörende Rechteck $\mathfrak{R}$ wird daher in eine geradlinige Strecke ausarten, die, wie man sofort erkennt, die größte der Sehnen des Ovals parallel der v-Achse bezw. der u-Achse ist.

Es ist vorteilhaft, die u- und die v-Achse in diese größten Sehnen zu legen, was stets unbeschadet der Allgemeinheit möglich ist, da der Ausdruck für ds dabei den *Liouville*schen Typus behält. Für die Punkte des Ovals mögen dann die Werte von u in dem Intervall

$$(1.) \qquad u_1 \leq u \leq u_2$$

liegen, die Werte von v in dem Intervall

$$(2.) \qquad v_1 \leq v < v_2.$$

Die Ableitungen von $U(u)$ und $V(v)$ sollen, wie üblich, mit $U'(u)$ und $V'(v)$ bezeichnet werden; sie haben in den Intervallen (1.) und (2.) bestimmte, endliche Werte und verschwinden nur, und zwar mit Zeichenwechsel, für

$u=0$ und $v=0$. Wird

$$U(u_1)=U(u_2)=M; \quad U(0)=L$$

gesetzt, so darf man voraussetzen, daß M kleiner als L ist; wäre das nämlich nicht der Fall, so ließe es sich durch die Vertauschung von u und v erreichen, die wieder unbeschadet der Allgemeinheit erlaubt ist. Weiter hat man dann

$$V(v_1)=V(v_2)=L; \quad V(0)=M.$$

Hieraus folgt, daß α in den Grenzen $(M\dots L)$ liegt. Jeder Wert von α innerhalb dieser Grenzen liefert ein Rechteck mit den Ecken

$$a,b \qquad a,B \qquad A,b \qquad A,B.$$

Die Wurzeln a, A und b, B ändern sich, wenn α das Intervall durchläuft, folgendermaßen. Wenn α von M bis L wächst, so wächst a von u_1 bis 0, A nimmt ab von u_2 bis 0, b nimmt ab von 0 bis v_1, B wächst von 0 bis v_2. Für $\alpha=M$ wird $b=B=0$, $a=u_1$, $A=u_2$ und für $\alpha=L$ wird $a=A=0$ und $b=v_1, B=v_2$. Jedem Werte von α ist daher ein bestimmtes Rechteck $\mathfrak{R}$ umkehrbar eindeutig zugeordnet, das betreffende Rechteck möge daher mit $\mathfrak{R}_\alpha$ bezeichnet werden. Die Rechtecke $\mathfrak{R}_M$ und $\mathfrak{R}_L$ sind ausgeartet, sie bestehen aus dem Stücke der u-Achse $u=(u_1\dots u_2)$ und dem Stücke der v-Achse $v=(v_1\dots v_2)$, die man hin und her durchlaufen muß.

6.

Die Konstanten M und L unterliegen noch einer Beschränkung. Damit die Bedingung (2.) erfüllt ist, dürfen U und V im Innern des Ovals nicht mit Zeichenwechsel verschwinden. Das würde aber eintreten, wenn M und L verschiedenes Vorzeichen besäßen. Sollte das der Fall sein, so setze man

$$U(u)=U_1(u)+C, \quad V(v)=V_1(v)+C,$$

wo C eine Konstante bedeutet, die man stets so wählen kann, daß die Größen $M-C$ und $L-C$ dasselbe Vorzeichen besitzen. Werden diese Ausdrücke für U und V in ds^2 sustituiert, so bleibt der *Liouville*sche Typus erhalten, und es ergeben sich für die geodätischen Linien die Gleichungen

$$(\mathrm{A}_1.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{U_1\,du}{\sqrt{U_1-\alpha_1}} + \int \frac{V_1\,dv}{\sqrt{\alpha_1-V_1}} = t-\tau_1, \\[2ex] \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{U_1-\alpha_1}} - \int \frac{dv}{\sqrt{\alpha_1-V_1}} = \beta_1, \end{cases}$$

in denen jetzt an die Stelle von M und L die Größen $M-C$ und $L-C$ treten, die beide dasselbe Vorzeichen besitzen. Es darf mithin unbeschadet der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß M und L dasselbe Vorzeichen haben.

Zu den Gleichungen (A_1.) hätte man noch auf einem anderen Wege gelangen können, nämlich durch lineare Kombination der Gleichungen (A.). Hieraus ergibt sich die Möglichkeit einer beachtenswerten Ausdehnung des erweiterten Theorems von Herrn *Staude*. Ist nämlich in den Gleichungen

$$(\mathrm{B}^*.)\quad \begin{cases} x = \int_a^u \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}} + \int_b^v \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)h(v)}}, \\ y = \int_a^u \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}} + \int_b^v \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)h(v)}}, \end{cases}$$

die aus den Gleichungen (B.) bei der Annahme

$$f(u) = g(u), \qquad h(v) = k(v)$$

hervorgehen, die Bedingung 2) nicht erfüllt, so bilde man die linearen Kombinationen

$$X = \alpha x + \beta y, \qquad Y = \gamma x + \delta y,$$

wo die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nur der Bedingung zu unterwerfen sind, daß ihre Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht gleich Null ist, und untersuche, ob vielleicht für die Funktionen

$$\alpha\varphi(u) + \beta\chi(u), \ \gamma\varphi(u) + \delta\chi(u); \ \alpha\psi(v) + \beta\omega(v), \ \gamma\psi(v) + \delta\omega(v)$$

die Bedingung 2) bei geeigneter Wahl der Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ befriedigt wird. Das wird in vielen Fällen eintreten, und dann werden u und v nach dem erweiterten Theorem von Herrn *Staude* eindeutige, endliche und stetige, doppelt reell periodische Funktionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente X und Y, folglich auch Funktionen genau derselben Beschaffenheit von x und y.

7.

Nach dieser Abschweifung will ich zu den Funktionen a, A und b, B von α zurückkehren, die noch einer genaueren Untersuchung bedürfen. Diese Funktionen stehen in engstem Zusammenhange mit dem Ovale

$$U(u) - V(v) = 0;$$

denn die Gleichungen

$$\begin{cases} u = a(\alpha) \\ v = b(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} u = a(\alpha) \\ v = B(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} u = A(\alpha) \\ v = b(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} u = A(\alpha) \\ v = B(\alpha) \end{cases}$$

sind zusammengenommen eine Parameterdarstellung dieser Kurve.

Diese Parameterdarstellung ist einer Vereinfachung fähig. Um a und A gleichzeitig als Funktionen von α darzustellen, bediene ich mich der Identität

$$\left.\begin{matrix} A \\ a \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(A + a) \pm \frac{1}{2}(A - a)$$

und versuche a und A durch die Gleichung

$$u = \lambda(\alpha) \pm \sqrt{\varrho(\alpha)} \tag{a.}$$

in der Weise darzustellen, daß für positives Vorzeichen der Wurzel A, für negatives a erhalten wird. Soll das der Fall sein, so müssen zunächst die Gleichungen bestehen:

$$u_1 = \lambda(M) - \sqrt{\varrho(M)}, \qquad u_2 = \lambda(M) + \sqrt{\varrho(M)},$$
$$\lambda(L) = 0, \qquad \varrho(L) = 0.$$

Da a und A als Funktionen von α für das Intervall $(M \dots L)$ eindeutig, endlich und stetig waren, muß dasselbe für $\lambda(\alpha)$ und $\varrho(\alpha)$ gelten. Ferner war

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{1}{U'(A)}, \qquad \frac{da}{d\alpha} = \frac{1}{U'(a)},$$

wo der Nenner nur für $a = A = 0$, das heißt für $\alpha = L$ verschwindet und sonst bei $\frac{dA}{d\alpha}$ negativ, bei $\frac{da}{d\alpha}$ positiv ist. Jetzt wird aber

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{\lambda'(\alpha)\sqrt{\varrho(\alpha)} + \frac{1}{2}\varrho'(\alpha)}{\sqrt{\varrho(\alpha)}}$$

und

$$\frac{da}{d\alpha} = \frac{\lambda'(\alpha)\sqrt{\varrho(\alpha)} - \frac{1}{2}\varrho'(\alpha)}{\sqrt{\varrho(\alpha)}}.$$

Mithin müssen die Ableitungen der Funktionen $\lambda(\alpha)$ und $\varrho(\alpha)$ endlich sein und zwischen ihnen die Ungleichheiten bestehen

$$-\frac{1}{2}\varrho'(\alpha) > \lambda'(\alpha)\sqrt{\varrho(\alpha)} > +\frac{1}{2}\varrho'(\alpha).$$

Da $\sqrt{\varrho(\alpha)}$ im Nenner steht, darf diese Funktion nur für $\alpha = L$ verschwinden, muß also für $M \leqq \alpha < L$ positive Werte haben. Endlich muß $\varrho(\alpha)$ für $\alpha = L$

von der ersten Ordnung verschwinden. Da nämlich die Gleichung

$$U(a) = L$$

die Doppelwurzel $\alpha = 0$ hat, beginnt die Entwicklung von $\alpha - L$ nach Potenzen von α mit einem Gliede, das α^2 enthält. Folglich beginnt die Entwicklung von $\sqrt{\varrho(\alpha)}$ nach Potenzen von α mit einem Gliede, das α^1 enthält, und daher auch die Entwicklung von $U'(\alpha)$ mit einem ebensolchen Gliede. So mußte es aber herauskommen, da $U'(\alpha)$ für $\alpha = 0$ von der ersten Ordnung verschwinden sollte.

In entsprechender Weise ergibt sich für b und B die Darstellung:

$$\text{(b.)} \qquad v = \mu(\alpha) \pm \sqrt{\sigma(\alpha)}.$$

Hierin müssen die Funktionen $\mu(\alpha)$ und $\sigma(\alpha)$ für

$$M \leqq \alpha \leqq L$$

eindeutig, endlich und stetig sein und endliche Ableitungen besitzen. Ferner müssen die Gleichungen bestehen

$$v_1 = \mu(L) - \sqrt{\sigma(L)}, \qquad v_2 = \mu(L) + \sqrt{\sigma(L)},$$
$$\mu(M) = 0, \qquad \sigma(M) = 0;$$

dabei muß $\sigma(\alpha)$ für $\alpha = M$ von der ersten Ordnung verschwinden und für $M < \alpha \leqq L$ stets positiv sein. Endlich müssen zwischen den Ableitungen $\mu'(\alpha)$ und $\sigma'(\alpha)$ die Ungleichheiten bestehen

$$-\frac{1}{2}\sigma'(\alpha) < \mu'(\alpha)\sqrt{\sigma(\alpha)} < +\frac{1}{2}\sigma'(\alpha).$$

Die Bedeutung der Darstellungen (a.) und (b.) beruht darauf, daß die vorhergehenden Betrachtungen sich in gewisser Weise umkehren lassen. Man setze:

$$\text{(a.)} \qquad u = \lambda(\alpha) \pm \sqrt{\varrho(\alpha)},$$

$$\text{(b.)} \qquad v = \mu(\alpha) \pm \sqrt{\sigma(\alpha)}.$$

Die Funktionen $\lambda(\alpha)$, $\mu(\alpha)$; $\varrho(\alpha)$, $\sigma(\alpha)$ mögen in dem Intervall

$$M \leqq \alpha \leqq L$$

eindeutig, endlich und stetig sein und die Gleichungen erfüllen:

$$\lambda(L) = 0, \quad \varrho(L) = 0; \qquad \mu(M) = 0, \quad \sigma(M) = 0;$$

dabei soll $\varrho(\alpha)$ für $\alpha = L$ von der ersten Ordnung verschwinden und sonst immer positiv sein, $\sigma(\alpha)$ für $\alpha = M$ von der ersten Ordnung verschwinden

und sonst immer positiv sein. Die Funktionen $\lambda(\alpha)$, $\mu(\alpha)$; $\varrho(\alpha)$, $\sigma(\alpha)$ mögen ferner überall endliche erste Ableitungen besitzen, zwischen denen die Ungleichheiten bestehen:

$$-\frac{1}{2}\varrho'(\alpha) > \lambda'(\alpha)\sqrt{\varrho(\alpha)} > +\frac{1}{2}\varrho'(\alpha),$$

$$-\frac{1}{2}\sigma'(\alpha) < \mu'(\alpha)\sqrt{\sigma(\alpha)} < +\frac{1}{2}\sigma'(\alpha).$$

Dann beweist man leicht, daß durch die Gleichungen (a.) und (b.) ein Oval dargestellt wird, dessen größte Sehnen parallel der u-Achse und der v-Achse in diese Achsen fallen. Dabei werden die Größen u_1, u_2 und v_1, v_2 durch die Gleichungen gegeben:

$$u_1 = \lambda(M) - \sqrt{\varrho(M)}, \qquad u_2 = \lambda(M) + \sqrt{\varrho(M)},$$
$$v_1 = \mu(L) - \sqrt{\sigma(L)}, \qquad v_2 = \mu(L) + \sqrt{\sigma(L)}.$$

Man erkennt ferner, daß sich aus den Gleichungen

$$u = \lambda(U) \pm \sqrt{\varrho(U)},$$
$$v = \mu(V) \pm \sqrt{\sigma(V)}$$

$U(u)$ und $V(v)$ als Funktionen von u und v ergeben, die in den Intervallen

$$u_1 \leqq u < u_2, \qquad v_1 \leqq v \leqq v_2$$

eindeutig, endlich und stetig sind und die Gleichungen erfüllen

$$U(u_1) = U(u_2) = M, \qquad U(0) = L, \qquad U'(0) = 0;$$
$$V(v_1) = V(v_2) = L, \qquad V(0) = M, \qquad V'(0) = 0.$$

Endlich besitzen die Gleichungen

$$U(u) - \alpha = 0, \qquad \alpha - V(v) = 0,$$

wenn α dem Intervall

$$M < \alpha < L$$

angehört, zwei einfache Wurzeln a, A und b, B; denn gemäß den Bedingungen, die den Funktionen $\lambda(\alpha)$, $\mu(\alpha)$; $\varrho(\alpha)$, $\sigma(\alpha)$ auferlegt wurden, haben die Ableitungen $U'(u)$ und $V'(v)$ innerhalb der Intervalle

$$u_1 < u < u_2, \qquad v_1 < v < v_2$$

bestimmte, endliche von Null verschiedene Werte. Diese Ableitungen verschwinden dagegen für $u = u_1$, $u = u_2$ bezw. $v = v_1$, $v = v_2$.

Die in diesem Abschnitte gewonnenen Ergebnisse sollen in folgenden Lehrsatz zusammengefaßt werden:

Lehrsatz 1. *Die Funktionen $\lambda(\alpha), \mu(\alpha)$; $\varrho(\alpha), \sigma(\alpha)$ der reellen Veränderlichen α mögen in dem Intervall*

$$M \leqq \alpha \leqq L$$

den Bedingungen genügen:

1. *Sie sind darin sämtlich eindeutig, endlich und stetig.*

2. *Innerhalb des Intervalles haben die Funktionen $\varrho(\alpha)$ und $\sigma(\alpha)$ positive, von Null verschiedene Werte, dagegen verschwindet $\varrho(\alpha)$ für $\alpha = L$, $\sigma(\alpha)$ für $\alpha = M$ von der ersten Ordnung.*

3. *Die Funktionen $\lambda(\alpha)$ und $\mu(\alpha)$ verschwinden bezw. für $\alpha = L$ und $\alpha = M$.*

4. *Alle vier Funktionen besitzen endliche Ableitungen, zwischen denen die Ungleichheiten bestehen:*

$$-\frac{1}{2}\varrho'(\alpha) > \lambda'(\alpha)\sqrt{\varrho(\alpha)} > +\frac{1}{2}\varrho'(\alpha),$$

$$-\frac{1}{2}\sigma'(\alpha) < \mu'(\alpha)\sqrt{\sigma(\alpha)} < +\frac{1}{2}\sigma'(\alpha).$$

Setzt man unter diesen Voraussetzungen

$$\text{(a.)} \qquad u = \lambda(\alpha) \pm \sqrt{\varrho(\alpha)},$$

$$\text{(b.)} \qquad v = \mu(\alpha) \pm \sqrt{\sigma(\alpha)},$$

so variieren u und v zwischen den Grenzen u_1 und u_2, v_1 und v_2, die durch die Gleichungen

$$u_1 = \lambda(M) - \sqrt{\varrho(M)} < 0, \qquad u_2 = \lambda(M) + \sqrt{\varrho(M)} > 0,$$
$$v_1 = \mu(L) - \sqrt{\sigma(L)} < 0, \qquad v_2 = \mu(L) + \sqrt{\sigma(L)} > 0$$

gegeben werden, und durch die Gleichungen (**a.**) *und* (**b.**) *wird in der uv-Ebene eine geschlossene Kurve dargestellt, die von jeder Parallelen zur u-Achse und zur v-Achse, welche sie überhaupt trifft, in zwei Punkten geschnitten wird. Diese Kurve hat ferner überall eine bestimmte Tangente, die nur in den Punkten $0, u_1$ und $0, u_2$ sowie $v_1, 0$ und $v_2, 0$ beziehungsweise der v- und u-Achse parallel ist.*

Aus, den Gleichungen

$$u^2 - 2\lambda(U)u + \lambda^2(U) - \varrho(U) = 0,$$
$$v^2 - 2\mu(V)v + \mu^2(V) - \sigma(V) = 0$$

ergeben sich umgekehrt U und V als eindeutige, endliche und stetige Funktionen von u und v, wenn deren Veränderlichkeit auf die Intervalle

$$u_1 \leqq u \leqq u_2, \qquad v_1 \leqq v \leqq v_2$$

beschränkt wird, und die Gleichungen

$$U(u) - \alpha = 0, \qquad \alpha - V(v) = 0$$

haben für jeden Wert von α zwischen M und L je zwei einfache Wurzeln; für $\alpha = M$ und $\alpha = L$ ergeben sich Doppelwurzeln.

Da, wie man leicht erkennt, der Ausdruck $U - V$ innerhalb des durch die Gleichungen (a.) und (b.) dargestellten Ovals positiv ausfällt, wird man diesen Gleichungen das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = [U(u) - V(v)](du^2 + dv^2)$$

zuordnen, denn man wird über den Verlauf der geodätischen Linien der zugehörigen Flächen gewisse Aussagen machen können.

8.

Ehe ich jedoch zur Untersuchung der geodätischen Linien übergehe, muß ich den Zusammenhang erörtern, der zwischen dem Oval und denjenigen Flächen besteht, bei denen das Quadrat des Linienelementes durch den zugeordneten Ausdruck ds^2 dargestellt wird.

Ein einfaches Beispiel wird zeigen, worauf es ankommt. Es sei:

$$ds^2 = (1 - u^2 - v^2)(du^2 + dv^2).$$

Setzt man

$$u = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi,$$

so wird

$$ds^2 = (1 - r^2)(dr^2 + r^2 d\varphi^2),$$

die zugehörigen Flächen sind daher auf Rotationsflächen abwickelbar. Nach *Minding* gibt es, wenn überhaupt eine Rotationsfläche existiert, der ein vorgelegtes Linienelement zukommt, eine ganze, von einem Parameter abhängige Schar solcher Flächen. Diese *Minding*sche Schar läßt sich in dem vor-

liegenden Fall leicht diskutieren. Man findet, daß diese Flächen aus unendlich vielen kongruenten Teilen bestehen, die ihrerseits wieder eine zur Drehungsachse senkrechte Symmetrieebene besitzen, durch die sie in zwei „Hälften“ zerfallen. Jede dieser Hälften wird vermöge der Kurven $u=$konst. und $v=$konst. konform und ein-eindeutig auf einen Teil des Ovals oder hier des Kreises

$$u^2+v^2=1$$

abgebildet. Dieser Teil ist entweder ein konzentrischer Kreis, dessen Halbmesser kleiner als Eins ist, oder ein konzentrischer Kreisring, dessen Kreise beide einen Halbmesser haben, der kleiner als Eins ist. Es gibt daher keine Rotationsfläche, durch die alle reellen Werte von ds erschöpft würden; durch jede der *Minding*schen Rotationsflächen wird, wie man sagen könnte, nur ein Teil des Ovals realisiert. Wenn man also auch den Verlauf der Bilder der geodätischen Kurven oder der *G-Kurven* in der uv-Ebene kennt, so bedarf es doch für die wirklichen Flächen, die zu dem gegebenen Linienelemente gehören, noch einer besonderen Untersuchung, bei der die Natur der konformen Abbildung auf die uv-Ebene zu berücksichtigen ist.

Ein ähnliches Verhalten der zu einem gegebenen Linienelemente gehörigen Flächen wird man auch in anderen Fällen zu erwarten haben. Hieraus folgt, wie ich auch schon in meiner Abhandlung vom Jahre 1901 hervorgehoben habe, daß man scharf unterscheiden muß zwischen den Eigenschaften der geodätischen Linien und den Eigenschaften der G-Kurven. Gewisse Rückschlüsse sind allerdings gestattet, sobald man annimmt, daß ein singularitätenfreies Flächenstück ein-eindeutig auf ein Stück des Ovales abgebildet wird. Unter dem hierin liegenden Vorbehalt will ich mich im folgenden auf die Untersuchung der G-Kurven beschränken.

9.

Es sei u_0, v_0 irgend ein Punkt im Innern des Ovales, sodaß also

$$U(u_0) > V(v_0)$$

ist. Wird der Konstanten α irgend ein bestimmter Wert beigelegt, der dem in dem Intervall $\alpha=(M \dots L)$ enthaltenen Teilintervall

$$V(v_0) < \alpha < U(u_0)$$

angehört, so haben die Ausdrücke

$$U(u) - \alpha = (U(u) - U(u_0)) + (U(u_0) - \alpha)$$

und

$$\alpha - V(v) = (\alpha - V(v_0)) + (V(v_0) - V(v))$$

in dem Punkte u_0, v_0 wesentlich positive Werte, mithin liegt der Punkt u_0, v_0 im Innern des Rechteckes $\mathfrak{R}_\alpha$ mit den Ecken

$$a, b \qquad a, B \qquad A, b \qquad A, B,$$

wo die Größen a, A und b, B die Wurzeln der Gleichungen

$$U(u) - \alpha = 0, \qquad \alpha - V(v) = 0$$

sind.

Durch den Punkt u_0, v_0 gehen unendlich viele G-Kurven, die durch ihre Anfangsrichtung, das heißt durch die Richtung ihrer Tangente im Punkte u_0, v_0 von einander unterschieden werden können. Diese Richtung ist durch den Wert bestimmt, den das Verhältnis $dv : du$ in diesem Punkte besitzt und der mit p_0 bezeichnet werde. Damit die zu der Anfangsrichtung p_0 gehörige G-Kurve auf ein Umkehrproblem (A.) mit dem Rechteck $\mathfrak{R}_\alpha$ führt, muß zwischen p_0 und α die Relation

$$\alpha = \frac{V(v_0) + U(u_0)\, p_0^2}{1 + p_0^2}$$

bestehen; durchläuft p_0 alle Werte von 0 bis $+\infty$, so durchläuft α alle Werte des Intervalles $(U(u_0) \ldots V(v_0))$. Wird der Größe α einer der extremen Werte $U(u_0)$ und $V(v_0)$ beigelegt, so geht die Begrenzung des zugehörigen Rechteckes durch den Punkt u_0, v_0.

Nach dem vorhergehenden darf man

$$U(u) - \alpha = (u - a)(A - u) f(u),$$
$$\alpha - V(v) = (v - b)(B - v) h(v)$$

setzen, und auf das Umkehrproblem

$$(\text{D.}) \quad \begin{aligned} x &= \int_a^u \frac{U\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u) f(u)}} + \int_b^v \frac{-V\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v) h(v)}}, \\ y &= \int_a^u \frac{du}{\sqrt{(u-a)(A-u) f(u)}} + \int_b^v \frac{-dv}{\sqrt{(v-b)(B-v) h(v)}}, \end{aligned}$$

das erweiterte Theorem von Herrn *Staude* anwenden. Alsdann werden u und v eindeutige, endliche und stetige Funktionen von x und y, die überdies doppelt periodisch sind mit den Periodensystemen

$$2\omega_{11} = 2\int_a^A \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}}, \qquad 2\omega_{12} = 2\int_a^A \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}},$$

und

$$2\omega_{21} = 2\int_b^B \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha-V}}, \qquad 2\omega_{22} = 2\int_b^B \frac{dv}{\sqrt{\alpha-V}}.$$

In diesen Funktionen u und v hat man, um zu dem Umkehrproblem (A.) mit der Anfangsbedingung zu gelangen, daß u, v und $dv:du$ zur Zeit $t=0$ die Werte u_0, v_0 und p_0 haben sollen, zu setzen:

$$x = t + \int_a^u \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} + \int_b^{v_0} \frac{-V\,dv}{\sqrt{\alpha-V}},$$
$$y = \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} + \int_b^{v_0} \frac{-dv}{\sqrt{\alpha-V}}.$$

Dann ergeben sich u und v als eindeutige, endliche und stetige Funktionen von t, und man erhält so eine Parameterdarstellung der G-Kurve, die durch den Punkt u_0, v_0 geht und die Anfangsrichtung p_0 hat.

Aus dieser Parameterdarstellung lassen sich wichtige Folgerungen ziehen. Zunächst erkennt man, daß u und v stets dem Rechtecke $\mathfrak{R}_\alpha$ angehören. Das bedeutet aber, daß die betreffende G-Kurve ganz in diesem Rechtecke $\mathfrak{R}_\alpha$ verläuft. Weiter läßt sich zeigen, daß diese Kurve entweder geschlossen ist oder das Rechteck $\mathfrak{R}_\alpha$ überall dicht erfüllt.

Ist u_1, v_1 irgend ein Punkt des Rechteckes $\mathfrak{R}_\alpha$, der auch mit dem Punkte u_0, v_0 zusammenfallen darf, so werden u und v, wenn man sie gemäß den Gleichungen (D.) als Funktionen von x und y ansieht, die Werte u_1 und v_1 für

$$x = x_1 + 2m_1\omega_{11} + 2m_2\omega_{21},$$
$$y = y_1 + 2m_1\omega_{12} + 2m_2\omega_{22}$$

annehmen, wo m_1 und m_2 beliebige ganze Zahlen bedeuten, während x_1 und y_1 dem Gebiete

$$x = 2\varrho\omega_{11} + 2\sigma\omega_{21}, \quad y = 2\varrho\omega_{12} + 2\sigma\omega_{22} \qquad [\varrho, \sigma = (0 \ldots 1)]$$

angehören; es läßt sich beweisen, daß es in diesem Gebiete nur zwei Stellen x_1, y_1 gibt, die die verlangten Werte u_1 und v_1 von u und v liefern, jedoch ist dieser Beweis für das folgende nicht erforderlich. Jetzt sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Hat *erstens* das Verhältnis

$$\frac{\omega_{12}}{\omega_{22}} = q$$

keinen rationalen Wert, so lassen sich nach einem bekannten Satze beliebig viele Paare ganzer Zahlen μ_1, μ_2 derart bestimmen, daß

$$y_1 + 2\mu_1\omega_{12} + 2\mu_2\omega_{22}$$

irgend einem gegebenen Werte y_2 beliebig nahe kommt. Hieraus folgt vermöge der Stetigkeit der Funktionen u und v, daß zu den Werten

$$x = x_1 + 2\mu_1\omega_{11} + 2\mu_2\omega_{21},$$
$$y = y_2$$

Werte u_2 und v_2 von u und v gehören, die sich beliebig wenig von u_1 und v_1 unterscheiden. Geht man jetzt zu der betrachteten G-Kurve zurück, definiert also u und v durch die Gleichungen (A.), und wählt

$$y_2 = \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} + \int_b^{v_0} \frac{-dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

so folgt, daß zur Zeit

$$t = x_1 + 2\mu_1\omega_{11} + 2\mu_2\omega_{21} - \int_a^{u_0} \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} + \int_b^{v_0} \frac{-V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}}$$

der bewegte Punkt oder genauer sein Bild in der uv-Ebene einen Punkt in der uv-Ebene erreicht, der dem gegebenen Punkte u_1, v_1 beliebig nahe kommt, und das tritt sogar beliebig oft ein, da es ja beliebig viele Paare ganzer Zahlen μ_1, μ_2 gibt, die die verlangte Beschaffenheit besitzen. Hieraus folgt aber sofort, daß die betreffende G-Kurve das Rechteck $\mathfrak{R}$ überall dicht bedeckt.

Hat *zweitens* das Verhältnis q einen rationalen Wert, so seien g_1 und g_2 diejenigen beiden ganzen Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, für die

$$2g_1\omega_{12} + 2g_2\omega_{22} = 0$$

wird, während

$$2g_1\omega_{11} + 2g_2\omega_{21} = 2\Omega$$

positiv ausfällt; da

$$\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21} = \int_a^A \int_b^B \frac{(U-V)\,du\,dv}{\sqrt{U-\alpha}\sqrt{\alpha - V}}$$

einen wesentlich positiven, von Null verschiedenen Wert hat, kann Ω nicht

verschwinden. In diesem Falle werden u_0 und v_0 zur Zeit

$$t = 2g_1\omega_{11} + 2g_2\omega_{21}$$

genau dieselben Werte u und v annehmen, die sie zur Zeit $t = 0$ besaßen, denn das Wertepaar u_0, v_0 gehört bei ganzzahligem g_1 und g_2 zu

$$x = 2g_1\omega_{11} + 2g_2\omega_{21} + \int_a^u \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} + \int_b^v \frac{-V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

$$y = 2g_1\omega_{12} + 2g_2\omega_{22} + \int_a^u \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} + \int_b^v \frac{-dv}{\sqrt{\alpha - V}}.$$

Mithin erhält man in dem zweiten Fall eine geschlossene Kurve, die innerhalb des Rechteckes $\mathfrak{R}_\alpha$ verläuft.

10.

Während im vorhergehenden eine einzelne G-Kurve behandelt wurde, will ich nunmehr die Schar der durch den Punkt u_0, v_0 gehenden G-Kurven ins Auge fassen. Durchläuft p_0 alle Werte von 0 bis $+\infty$, so variiert α von $V(v_0)$ bis $U(u_0)$. Mit α ändern sich die zugehörigen Rechtecke $\mathfrak{R}(\alpha)$, es ändern sich ebenso, wenigstens im allgemeinen, auch die Perioden $2\omega_{11}$, $2\omega_{12}, 2\omega_{21}, 2\omega_{22}$, es ändert sich daher auch, wenigstens im allgemeinen, das Verhältnis q, dessen Wert den Charakter der betreffenden G-Kurve bestimmt. Es läßt sich beweisen, daß q entweder eine stetige Funktion von α ist oder sich auf eine Konstante reduziert.

Es war

$$\omega_{12} = \int_a^A \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}}.$$

Wird hierin an Stelle von u als Integrationsvariable U eingeführt, so ist $U = L$ sowohl für $u = a$ als auch für $u = A$. Man hat daher das Integrationsintervall in die Teilintervalle $(a \dots 0)$ und $(0 \dots A)$ zu spalten, denen die Intervalle $(\alpha \dots L)$ und $(L \dots \alpha)$ von U entsprechen. In dem ersten Intervall ist

$$u = \lambda(\alpha) - \sqrt{\varrho(\alpha)},$$

in dem zweiten

$$u = \lambda(\alpha) + \sqrt{\varrho(\alpha)}$$

zu setzen. Die Ausführung der Substitution ergibt dann

$$\omega_{12} = \int_a^L \frac{-\varrho'(U)\,dU}{\sqrt{\varrho(U)}\,\sqrt{U-\alpha}}.$$

Hier ist zu beachten, daß $\varrho(U)$ für $U=L$ von der ersten Ordnung verschwindet. Deshalb setze ich

$$\frac{-\varrho'(U)}{\sqrt{\varrho(U)}} = \frac{R(U)}{\sqrt{L-U}},$$

sodaß sich für ω_{12} der Ausdruck ergibt

$$\omega_{12} = \int_a^L \frac{R(U)\,dU}{\sqrt{(U-\alpha)(L-U)}}.$$

Um dies Integral in ein eigentliches zu verwandeln, braucht man nur zu substituieren

$$U = \frac{L+\alpha}{2} - \frac{L-\alpha}{2}\cos\xi.$$

Dann wird

$$\omega_{12} = \int_0^\pi R\left(\frac{L+\alpha}{2} - \frac{L-\alpha}{2}\cos\xi\right)d\xi.$$

Nunmehr läßt sich die Differentiation nach dem Parameter α ohne weiteres ausführen, und man findet, wenn man wieder zur Veränderlichen U zurückkehrt,

$$\frac{\partial\omega_{12}}{\partial\alpha} = \int_a^L \frac{L-U}{L-\alpha}\,\frac{R'(U)\,dU}{\sqrt{(U-\alpha)(L-U)}}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß ω_{12} eine stetige Funktion von α ist.

In ähnlicher Weise läßt sich das Integral

$$\omega_{22} = \int_M^\alpha \frac{\sigma'(V)\,dV}{\sqrt{\sigma(V)}\,\sqrt{\alpha-V}}$$

umformen. Man findet

$$\omega_{22} = \int_M^\alpha \frac{S(V)\,dV}{\sqrt{(V-M)(\alpha-V)}},$$

und hieraus ergibt sich mit Hilfe der Substitution

$$V = \frac{\alpha+M}{2} - \frac{\alpha-M}{2}\cos\eta$$

als Ableitung von ω_{22} nach α:

$$\frac{\partial\omega_{22}}{\partial\alpha} = \int_M^\alpha \frac{V-M}{\alpha-M}\,\frac{S'(V)\,dV}{\sqrt{(V-M)(\alpha-V)}}.$$

Solange a und A von einander verschieden sind, hat

$$\omega_{12} = \int_a^A \frac{du}{\sqrt{U - \alpha}}$$

sicher einen wesentlich positiven, von Null verschiedenen Wert. Läßt man a und A sich nähern, wobei beide dem Werte Null zustreben, so nähert sich α dem Werte L. Die Gleichung

$$\omega_{12} = \int_0^\pi R\left(\frac{L+\alpha}{2} - \frac{L-\alpha}{2}\cos\xi\right) d\xi$$

zeigt dann, daß ω_{12} sich dem Grenzwerte

$$\pi R(L) = \pi\sqrt{-\varrho'(L)}$$

nähert, der von Null verschieden ist.

Ebenso hat ω_{22}, solange b und B von einander verschieden sind, einen wesentlich positiven Wert. Für $b = B$ wird aber $\alpha = M$ und für ω_{22} ergibt sich der Grenzwert

$$\pi S(M) = \pi\sqrt{\sigma'(M)},$$

der von Null verschieden ist.*)

Da ω_{12} und ω_{22} stetige Funktionen von α sind und da ω_{22} niemals verschwindet, ist auch q, wenn es wirklich von α abhängt und sich nicht auf eine Konstante reduziert, eine stetige Funktion von α, womit die vorher ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Man könnte jetzt den Einwand erheben, daß vielleicht q sich immer auf eine Konstante reduziere. Daß es sich nicht so verhält, läßt sich leicht zeigen. Wäre q eine Konstante, so müßte

$$\omega_{12}\frac{\partial\omega_{22}}{\partial\alpha} - \omega_{22}\frac{\partial\omega_{12}}{\partial\alpha} = 0$$

sein, woraus durch Einsetzen der Werte folgt:

$$Q(\alpha) = \int_\alpha^L \int_M^\alpha \frac{R(U)S'(V)(L-\alpha)(V-M) - S(V)R'(U)(\alpha-M)(L-U)}{\sqrt{(U-\alpha)(L-U)}\sqrt{(V-M)(\alpha-V)}}\, dU dV = 0.$$

Diese Gleichung muß identisch bestehen, wenn α zwischen $U(u_0)$ und $V(v_0)$ liegt. Wenn aber die betrachteten Funktionen alle analytisch sind, so ist dasselbe für alle Werte von α zwischen M und L der Fall. Bildet man

*) Hierin liegt die Berechtigung, die beiden größten Sehnen des Ovales parallel der u- und v-Achse als geschlossene G-Kurven anzusehen.

nun die Grenzwerte des Ausdruckes Q für $\alpha = L$ und für $\alpha = M$, so ergibt sich

$$Q(L) = R(L)\int_M^L \frac{V-M}{L-M}\frac{S'(V)dV}{\sqrt{(V-M)(L-V)}} - R'(L)\int_M^L \frac{S(V)dV}{\sqrt{(V-M)(L-V)}},$$

$$Q(M) = -S(M)\int_M^L \frac{L-U}{L-M}\frac{R'(U)dU}{\sqrt{(U-M)(L-U)}} + S'(M)\int_M^L \frac{R(U)dU}{\sqrt{(U-M)(L-U)}}.$$

Diese beiden Ausdrücke verschwinden nicht identisch. Wird im besonderen

$$S(V) = -1$$

gesetzt, was erlaubt ist, so kommt

$$Q(M) = \int_L^M \frac{L-U}{L-M}\frac{R'(U)dU}{\sqrt{(U-M)(L-U)}}$$

und dieser Ausdruck ist, wenn $R'(U)$ stets positiv ist, sicher nicht gleich Null.

Auf der anderen Seite gibt es Fälle, in denen q konstant ist. Um solche Fälle zu erhalten, braucht man nur anzunehmen, daß $R(U)$ und $S(V)$ sich auf Konstanten reduzieren, denn alsdann verschwinden die Ableitungen von ω_{12} und ω_{22} nach α, mithin ist q eine Konstante. Die Funktionen $U(u)$ und $V(v)$ erhält man in diesem Falle aus den Gleichungen

$$u^2 - 2\lambda(U)u + \lambda^2(U) - r^2(L-U) = 0,$$
$$v^2 - 2\mu(V)v + \mu^2(V) - s^2(V-M) = 0,$$

in denen r und s Konstanten bedeuten. Bei dieser Annahme wird

$$\omega_{12} = \pi r, \qquad \omega_{22} = \pi s.$$

Daher ist

$$q = \frac{r}{s},$$

q ist also rational oder irrational, je nachdem r und s kommensurabel sind oder nicht. Besonders einfach gestaltet sich die Untersuchung der zu dem betreffenden Linienelement gehörigen G-Kurven, wenn man annimmt, daß $\lambda(U)$ und $\mu(U)$ Konstanten sind. U und V werden dann ganze Funktionen zweiten Grades von u und v, und die G-Kurven sind *Lissajous*sche Kurven. Die genauere Durchführung dieser Annahme hat einer meiner Zuhörer, Herr *A. Pfister,* übernommen; sie bildet den Inhalt seiner Dissertation „*Über die geodätischen Linien einer Klasse von Flächen, deren Linienelement den Liouvilleschen Typus hat*“ (Kiel 1904).

Die Frage, wann q sich auf eine Konstante reduziert, in voller Allgemeinheit zu beantworten, ist mir noch nicht gelungen; immerhin scheint der hier gegebene Ansatz zu weiteren Untersuchungen aufzufordern.

Zum Schluß sollen die Ergebnisse, die in den Abschnitten 8 bis 10 gewonnen worden sind, in den folgenden Lehrsatz zusammengefaßt werden.

Lehrsatz 2. *Wird unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes 1*

$$ds^2 = [U(u) - V(v)](du^2 + dv^2)$$

gesetzt, so besitzen die zugehörigen G-Kurven folgende Eigenschaften:

Wenn von einem Punkte u_0, v_0 im Innern des Ovales eine G-Kurve mit der Anfangsrichtung

$$p_0 = \frac{\sqrt{\alpha - V(v_0)}}{\sqrt{U(u_0) - \alpha}}$$

ausgeht, so liegt sie ganz in dem Rechteck $\mathfrak{R}_\alpha$, dessen Ecken

$$a, b \qquad a, B \qquad A, b \qquad A, B$$

dadurch bestimmt sind, daß a, A und b, B die Wurzeln der Gleichungen

$$U(u) - \alpha = 0, \qquad \alpha - V(v) = 0$$

bedeuten. Bildet man ferner den Quotienten

$$q = \int_a^A \frac{du}{\sqrt{U - \alpha}} : \int_b^B \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. *Ist q rational, so ist die G-Kurve geschlossen.*

2. *Ist q irrational, so wird das ganze Rechteck $\mathfrak{R}_\alpha$ von der G-Kurve überall dicht erfüllt.*

Betrachtet man die Schar der von dem Punkte u_0, v_0 ausgehenden G-Kurven, so gibt es wieder zwei Möglichkeiten:

1. *Der Quotient q ist von α unabhängig, hat also für alle Kurven der Schar denselben Wert. Dann sind diese Kurven entweder alle geschlossen oder erfüllen alle ihr Rechteck überall dicht.*

2. *Der Quotient q ist eine stetige Funktion von α, also auch von p_0. Dann sind unter den Anfangsrichtungen diejenigen überall dicht verteilt, die ein rationales q und damit geschlossene G-Kurven liefern; die Mächtigkeit dieser Anfangsrichtungen ist die des Inbegriffes der ganzen Zahlen. Die übrigen Anfangsrichtungen liefern G-Kurven, die ihr Rechteck überall dicht bedecken.*

Der innere Zusammenhang der flächentheoretischen Grundformeln.

Von Herrn *J. Knoblauch* in Berlin.

I.

Wenn man die Formelsysteme überblickt, auf denen sich die zusammenfassenden Darstellungen der Flächentheorie bis zu den neuesten hin aufbauen, so kann man sich des Eindrucks nicht erwehren, daß es an einer einheitlichen Grundlage für diese Theorie noch fehlt. Wer an der Hand solcher Darstellungen in die Differentialgeometrie eindringt, wird zwar von der Wichtigkeit der *Gauß*schen partiellen Differentialgleichungen und der drei Relationen zwischen den sechs Fundamentalgrößen eine genaue Vorstellung gewinnen. Aber außerdem sieht er sich einer beträchtlichen Anzahl anderer Formelsysteme gegenüber, deren Zusammenhang mit jenen Gleichungen nicht klar ist und von denen er annehmen muß, daß sie sich, wenn überhaupt, auch in einander nur durch einen unverhältnismäßigen Aufwand an Rechnung überführen lassen. So werden, um ein Beispiel anzugeben, die Formeln von *Rodrigues* und die *Weingarten*schen Gleichungen gewöhnlich an ganz verschiedenen Stellen der Theorie bewiesen. Während es nun sehr leicht ist, jene Formeln durch Einführung der Parameter der Krümmungslinien aus diesen zu folgern, so finde ich doch nirgends ausgesprochen, daß beide Gleichungssysteme inhaltlich identisch sind und daß daher verlangt werden muß, auch umgekehrt das *Weingarten*sche aus dem von *Rodrigues* auf einfachem Wege herzuleiten.

Dem Mangel einer einheitlichen und leicht zu handhabenden Methode ist es auch zuzuschreiben, daß die herkömmlichen Formelsysteme fast nie den Inhalt eines flächentheoretischen Ergebnisses vollständig wiedergeben.

Man pflegt sich bei einem solchen Resultat mit dem geometrischen Satze selbst zu begnügen und legt höchstens noch Wert auf eine gewisse formale Einfachheit des Beweises, wodurch dann oft die Stellung des Satzes innerhalb der Theorie verschoben wird. Die Spezialisierung der krummlinigen Koordinaten ist ein von alters her beliebtes Hilfsmittel zur Vereinfachung der Beweise. Allein niemals kann ein differentialgeometrisches Verfahren als befriedigend angesehen werden, das nicht mit einer Relation unter geometrischen Größen zugleich die Möglichkeit liefert, diese Größen durch Rechnungsausdrücke von leicht zu überblickendem Bildungsgesetz, und zwar unter der allgemeinsten Annahme über die Parameter, wirklich darzustellen.

Je eingehender man sich mit der Theorie der krummen Flächen beschäftigt, um so mehr wird man in der Anschauung bestärkt, daß das übersichtlichste und brauchbarste System von Fundamentalformeln auf die Theorie eines simultanen Systems zweier quadratischen Differentialformen oder, etwas allgemeiner, einer quadratischen und einer bilinearen Differentialform zu gründen ist. Auch da, wo nur eine einzige Differentialform ins Spiel kommt, wie in der Theorie der Abwickelung, erweist es sich als sehr zweckmäßig, von den Hilfsmitteln der simultanen Transformation zweier solchen Formen Gebrauch zu machen. Man kann dies ohne weiteres, indem man zu der gegebenen Form z. B. das Quadrat einer beliebigen linearen Differentialform oder des Differentials einer willkürlichen Funktion hinzunimmt: eine Einführung, zu der man ohnedies veranlaßt wird, sobald man außer den beiden Koordinatenlinien noch eine dritte Kurve auf der Fläche betrachten will.

Freilich versteht es sich von selbst, daß aus der Theorie der Differentialformen als solcher keine geometrischen Resultate abgelesen werden können, daß also geometrische und analytische Untersuchungen einander in der Flächentheorie beständig durchdringen müssen. Die grundsätzliche Benutzung der Formentheorie lehrt aber zugleich die geometrischen Größen kennen, die für die Differentialgeometrie von wirklicher Bedeutung sind, und schützt vor der Einführung der großen Masse derer, denen keine Wichtigkeit beizulegen ist und die man daher, wo sie sich aus anderer Veranlassung eindrängen sollten, zu eliminieren bestrebt sein muß.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, jene einfache Methode im Zusammenhange darzulegen und für den Nachweis der Verknüpfung der Grundformeln unter einander zu verwerten. Die Formelsysteme selbst finden sich, um nur auf neuere Gesamtdarstellungen der Flächentheorie hinzuweisen,

Bemerkt sei noch, daß sich die Beweise einiger Formeln durch ausgiebigere Benutzung der Invariantentheorie hätten vereinfachen lassen. Doch ist das Bestreben maßgebend gewesen, mit möglichst wenig Hilfsmitteln auszukommen und namentlich eine tunlichst geringe Anzahl von Operationen einzuführen.

II.

Aus den Elementen der Differentialgeometrie ist bekannt, welche Wichtigkeit den beiden quadratischen Differentialformen

$$\mathsf{A} = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 = ds^2,$$

$$\mathsf{B} = L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2 = n\,ds^2$$

zukommt, wenn die cartesischen Koordinaten der Fläche als Funktionen zweier Parameter u, v betrachtet werden. Ihr Quotient n stellt die zu dem Differentialverhältnis $\frac{dv}{du}$ gehörige Normalkrümmung dar, und die Aufgabe, den größten und kleinsten Wert von n zu finden, führt geometrisch auf die Theorie der Hauptkrümmungen, namentlich den *Euler*schen Satz, analytisch auf die Transformation der beiden Formen A und B in algebraische Summen von Quadraten linearer Formen. Für

$$(1.)\qquad \mathsf{A} = a_{11}\,du^2 + 2\,a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv^2$$

als irgend eine definite,

$$(2.)\qquad \Lambda = l_{11}\,du^2 + 2\,l_{12}\,du\,dv + l_{22}\,dv^2$$

als ganz beliebige quadratische Differentialform findet diese Transformation ihren Ausdruck in den Gleichungen

$$(3.)\qquad \begin{aligned} \mathsf{A} &= \mathfrak{M}_1^2 + \mathfrak{M}_2^2, \\ \Lambda &= l_1\,\mathfrak{M}_1^2 + l_2\,\mathfrak{M}_2^2, \end{aligned}$$

vermöge deren sechs Größen, l_1, l_2 und die vier Koeffizienten m_{ik} in

$$(4.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= m_{11}\,du + m_{12}\,dv, \\ \mathfrak{M}_2 &= m_{21}\,du + m_{22}\,dv, \end{aligned}$$

ebensovielen Bedingungen unterworfen werden. Speziell sind l_1 und l_2 Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(5.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}l - l_{11}, & a_{12}l - l_{12} \\ a_{12}l - l_{12}, & a_{22}l - l_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Die aus den Gleichungen (3.) entspringenden Operationen und Grundformeln lassen sich aus denen, die ich im 115. Bande dieses Journals (S. 194 ff.) angegeben habe, durch Vertauschung von Bezeichnungen ohne weiteres herleiten. Im Anschluß an die dort getroffenen Festsetzungen, die hier nicht wiederholt werden sollen, nur unter geringer Abweichung in der Vorzeichenbestimmung, kann man für den besonders zu beachtenden Grenzfall, wo Λ dem Quadrat einer linearen Form gleich ist, die Definitionen folgendermaßen stellen.

Es sei

$$(6.)\qquad m_1\,du + m_2\,dv = \mathfrak{M}_0$$

eine lineare Differentialform, deren Koeffizienten als Funktionen von u und v entweder willkürlich angenommen oder der jeweiligen Untersuchung gemäß passend zu bestimmen sind. Wegen $\Lambda = \mathfrak{M}_0^2$ ist

$$l_{11} l_{22} - l_{12}^2 = 0,$$

und es sei l_1 diejenige Wurzel von (5.), die infolge hiervon verschwindet. Dann wird

$$(7.)\qquad l_2 = \frac{a_{22} l_{11} - 2a_{12} l_{12} + a_{11} l_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = \frac{a_{22} m_1^2 - 2a_{12} m_1 m_2 + a_{11} m_2^2}{a},$$

d. h.

$$l_2 = \sum_{i,k} \alpha_{ik}\, m_i m_k,$$

wenn, wie üblich, α_{ik} die durch die Determinante $|a_{ik}| = a$ dividierte, zu dem Elemente a_{ik} gehörige Unterdeterminante bezeichnet. i, k und andere nachher einzuführende Indizes nehmen unabhängig von einander die Werte 1 und 2 an. Daß die meisten der vorkommenden Formeln verallgemeinerungsfähig sind, wobei dann die Indizes die Werte von 1 bis zu einer beliebigen ganzen Zahl n zu durchlaufen haben, ist bereits erwähnt worden.

Wird nun, soweit nur quadratische oder bilineare Formen ins Spiel kommen, das Operationszeichen H_a durch die Formel

$$H_a(\Lambda, \Lambda) = \sum_{i,k} \alpha_{ik} l_{ik}$$

erklärt, so kann man setzen

$$(8.)\qquad l_2 = H_a(\Lambda, \mathfrak{M}_0^2).$$

Für $\mathfrak{M}_0 = d\varphi$ geht diese Größe in den *Beltrami*schen Differentialparameter erster Ordnung der Funktion φ über. Vermöge der zweiten Gleichung (3.),

die jetzt die Form

$$\Lambda = l_2 \mathfrak{M}_2^2$$

hat und mit

$$(m_1\,du + m_2\,dv)^2 = l_2(m_{21}\,du + m_{22}\,dv)^2$$

übereinkommt, können m_{21} und m_{22} auch dem Vorzeichen nach durch die Ausdrücke

$$(9.)\qquad m_{21} = \frac{m_1}{\sqrt{l_2}}, \qquad m_{22} = \frac{m_2}{\sqrt{l_2}},$$

d. h. $\mathfrak{M}_2$ durch den Ansatz

$$(10.)\qquad \mathfrak{M}_2 = \frac{\sqrt{a}\,(m_1\,du + m_2\,dv)}{\sqrt{a_{22}m_1^2 - 2a_{12}m_1m_2 + a_{11}m_2^2}}$$

definiert werden, wo die Quadratwurzeln positiv sind.

Die Koeffizienten von $\mathfrak{M}_1$ lassen sich durch die von $\mathfrak{M}_2$ eindeutig mittels der Formeln

$$(11.)\qquad \begin{aligned} m_{11} &= \frac{1}{\sqrt{a}}(a_{11}m_{22} - a_{12}m_{21}), \\ m_{12} &= \frac{1}{\sqrt{a}}(a_{12}m_{22} - a_{22}m_{21}) \end{aligned}$$

bestimmen, aus denen für $\mathfrak{M}_1$ selbst der Ausdruck folgt:

$$(12.)\qquad \mathfrak{M}_1 = \frac{(a_{11}m_2 - a_{12}m_1)\,du + (a_{12}m_2 - a_{22}m_1)\,dv}{\sqrt{a_{22}m_1^2 - 2a_{12}m_1m_2 + a_{11}m_2^2}}.$$

Es werde für zwei beliebige binäre Differentialformen die Bildung der Funktionaldeterminante inbezug auf die Differentiale mit nachfolgender Division durch das Produkt der Dimensionen der beiden Formen mit dem Operationszeichen D bezeichnet und bei dieser, wie allgemein bei irgend einer Invarianten bildenden Operation durch den Index a angedeutet, daß der entstehende Ausdruck durch Division mit einer passend gewählten Potenz der Determinante a in eine absolute Invariante verwandelt werde; sodaß z. B., wenn

$$\mathfrak{P}_0 = p_1\,du + p_2\,dv$$

eine beliebige lineare Differentialform ist,

$$D_a(\Lambda, \mathfrak{P}_0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} a_{11}\,du + a_{12}\,dv, & a_{12}\,du + a_{22}\,dv \\ p_1, & p_2 \end{vmatrix}$$

(19.) $$\mathfrak{p}_i = \sum_\nu \mu_{i\nu} p_\nu .$$

Sind nun insbesondere $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ in der oben angegebenen Weise mit dem Formenpaar $(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)$ verknüpft, so folgt aus den Werten (9.) und (11.) der Koeffizienten m_{ik}

$$m = \sqrt{a},$$

und es wird

(20.) $$\vartheta_1 \varphi = \frac{m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{a_{22} m_1^2 - 2a_{12} m_1 m_2 + a_{11} m_2^2}},$$
$$\vartheta_2 \varphi = \frac{(a_{22} m_1 - a_{12} m_2) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - (a_{12} m_1 - a_{11} m_2) \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{a}\sqrt{a_{22} m_1^2 - 2a_{12} m_1 m_2 + a_{11} m_2^2}} .$$

Will man die Differentiationen aller Ordnungen durch wiederholte Theta-Operationen ersetzen, so hat man vor allem zu fragen, welche Gleichung im System dieser Operationen die Integrabilitätsbedingung für die lineare Differentialform $d\varphi$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v},$$

vertritt. Sie kann als Bedingung dafür aufgefaßt werden, daß die Größe $\delta d\varphi - d\delta\varphi$, als bilineare Differentialform dargestellt, identisch verschwindet. Wieder werde von dem allgemeineren Gesichtspunkte aus $\mathfrak{P}_0$ an Stelle von $d\varphi$ betrachtet und die bilineare Kovariante dieser Differentialform,

$$\overline{\mathfrak{P}} = \delta \sum_\nu p_\nu du_\nu - d \sum_\nu p_\nu \delta u_\nu$$
$$= \sum_{\lambda, \nu} \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial u_\nu} - \frac{\partial p_\nu}{\partial u_\lambda} \right) du_\lambda \delta u_\nu$$

gebildet. Zunächst ergibt sich durch Einführung der Formen $\mathfrak{M}_i$ statt der Differentiale, und der ihnen entsprechenden

(21.) $$\overline{\mathfrak{M}}_i = \sum_\nu m_{i\nu} \delta u_\nu$$

statt der Größen δu_ν:

$$\overline{\mathfrak{P}} = \sum_{\alpha, \beta} \overline{\mathfrak{p}}_{\alpha\beta} \mathfrak{M}_\alpha \overline{\mathfrak{M}}_\beta ,$$

wo $\overline{\mathfrak{p}}_{\alpha\beta}$ durch die Gleichung

(22.) $$\sum_{i,k} \mu_{\alpha i} \mu_{\beta k} \left(\frac{\partial p_i}{\partial u_k} - \frac{\partial p_k}{\partial u_i} \right) = \overline{\mathfrak{p}}_{\alpha\beta}$$

definiert ist. Man kann die Differentialinvarianten $\bar{\mathfrak{p}}_{\alpha\beta}$ anders darstellen, indem man vermöge der aus (19.) und (16.) folgenden Formeln

$$p_\nu = \sum_\varrho m_{\varrho\nu}\,\mathfrak{p}_\varrho\,, \tag{23.}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu} = \sum_\varrho m_{\varrho\nu}\,\vartheta_\varrho\varphi \tag{24.}$$

die Größen p_ν durch die Invarianten $\mathfrak{p}_\varrho$, die Differentiationen durch die Theta-Operationen ersetzt. Unter Benutzung der Relationen

$$\sum_i m_{\varrho i}\,\mu_{\alpha i} = \begin{cases} 1, & \varrho = \alpha \\ 0, & \varrho \gtrless \alpha \end{cases} \tag{25.}$$

findet man, wenn

$$\sum_i (\mu_{\alpha i}\,\vartheta_\beta\, m_{\varrho i} - \mu_{\beta i}\,\vartheta_\alpha\, m_{\varrho i}) = \bar{\mathfrak{m}}_{\varrho,\alpha\beta} \tag{26.}$$

gesetzt wird,

$$\bar{\mathfrak{p}}_{\alpha\beta} = \vartheta_\beta\,\mathfrak{p}_\alpha - \vartheta_\alpha\,\mathfrak{p}_\beta + \sum_\varrho \bar{\mathfrak{m}}_{\varrho,\alpha\beta}\,\mathfrak{p}_\varrho. \tag{27.}$$

Die Größen $\bar{\mathfrak{m}}_{\varrho,\alpha\beta}$ sind dabei Invarianten des Formensystems $(\mathfrak{M}_i)$ allein.

Geht man in den Formeln (26.) zu den Differentialquotienten zurück, so kann man auch die Gleichung

$$\sum_{i,k} \mu_{\alpha i}\,\mu_{\beta k}\left(\frac{\partial m_{\varrho i}}{\partial u_k} - \frac{\partial m_{\varrho k}}{\partial u_i}\right) = \bar{\mathfrak{m}}_{\varrho,\alpha\beta} \tag{28.}$$

als Definition für $\bar{\mathfrak{m}}_{\varrho,\alpha\beta}$ gelten lassen. Sie lehrt, daß diese Größe für die Form $\mathfrak{M}_\varrho$ dieselbe Bedeutung hat, wie $\bar{\mathfrak{p}}_{\alpha\beta}$ für $\mathfrak{P}_0$.

Zu bemerken sind noch die aus (22.) folgenden Eigenschaften der Invarianten $\bar{\mathfrak{p}}_{\alpha\beta}$:

$$\bar{\mathfrak{p}}_{\beta\alpha} = \begin{cases} -\bar{\mathfrak{p}}_{\alpha\beta}, & \beta \gtrless \alpha \\ \;\;0, & \beta = \alpha \end{cases} \tag{29.}$$

die in gleicher Weise auch für die Größen $\bar{\mathfrak{m}}_{\varrho,\alpha\beta}$ gelten.

Inwiefern diese Definitionen und Ergebnisse auch für eine beliebige Anzahl von Variabeln $u_1, \ldots u_n$ bestehen bleiben, ist aus den Formeln selbst unmittelbar ersichtlich. Unter der hier beständig festgehaltenen Voraussetzung $n = 2$ ist auf Grund von (29.) nur eine einzige Größe $\bar{\mathfrak{p}}_{\alpha\beta}$ in Rechnung zu ziehen,

$$\bar{\mathfrak{p}}_{12} = (\mu_{11}\,\mu_{22} - \mu_{21}\,\mu_{12})\left(\frac{\partial p_1}{\partial u_2} - \frac{\partial p_2}{\partial u_1}\right)$$

oder

$$(30.)\qquad \bar{\mathfrak{p}}_{12} = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial p_1}{\partial v} - \frac{\partial p_2}{\partial u}\right).$$

Ihr treten die beiden Invarianten

$$(31.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{m}_{1,12} &= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial m_{11}}{\partial v} - \frac{\partial m_{12}}{\partial u}\right), \\ \mathfrak{m}_{2,21} &= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial m_{22}}{\partial u} - \frac{\partial m_{21}}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

zur Seite. Die bilineare Kovariante der Form $\mathfrak{P}_0$ hat den Ausdruck

$$\mathfrak{P} = \bar{\mathfrak{p}}_{12}(\mathfrak{M}_1 \overline{\mathfrak{M}}_2 - \mathfrak{M}_2 \overline{\mathfrak{M}}_1),$$

und die Integrabilitätsbedingung $\bar{\mathfrak{p}}_{12} = 0$ wird

$$(32.)\qquad \vartheta_2 \mathfrak{p}_1 - \vartheta_1 \mathfrak{p}_2 + \bar{\mathfrak{m}}_{1,12} \mathfrak{p}_1 - \bar{\mathfrak{m}}_{2,21} \mathfrak{p}_2 = 0.$$

Geht man endlich zu der Annahme $\mathfrak{P}_0 = d\varphi$, also

$$\mathfrak{p}_i = \vartheta_i \varphi$$

zurück und setzt zu weiterer Abkürzung

$$(33.)\qquad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{m}}_{1,12} &= -\mathfrak{g}_1, \\ \bar{\mathfrak{m}}_{2,21} &= -\mathfrak{g}_2, \end{aligned}$$

so erhält man als die gesuchte Gleichung, die bei Anwendung der Theta-Operationen aussagt, daß die Reihenfolge der Differentiationen gleichgültig ist:

$$(34.)\qquad \vartheta_2 \vartheta_1 \varphi - \vartheta_1 \vartheta_2 \varphi = \mathfrak{g}_1 \vartheta_1 \varphi - \mathfrak{g}_2 \vartheta_2 \varphi.$$

III.

Die Differentialform A möge jetzt die zu Anfang des vorigen Paragraphen bereits erwähnte Bedeutung haben, also das Quadrat des Linienelements einer Fläche darstellen, sodaß a_{11}, a_{12}, a_{22} den Fundamentalgrößen erster Ordnung gleich werden:

$$(1.)\qquad a_{11} = E, \qquad a_{12} = F, \qquad a_{22} = G.$$

Die Koeffizienten m_1, m_2 von $\mathfrak{M}_0$ bleiben willkürlich; dann stellt die Gleichung $\mathfrak{M}_0 = 0$ oder $\mathfrak{M}_2 = 0$ eine beliebige auf der Fläche liegende und

durch den Punkt (u, v) gehende Kurve c, $\mathfrak{M}_1 = 0$ eine zu ihr senkrechte Kurve c' dar. Unter der Annahme (1.) sollen nun an Stelle von

$$\mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{M}_2, \quad \vartheta_1\varphi, \quad \vartheta_2\varphi$$

die Zeichen

$$\mathfrak{M}', \quad \mathfrak{M}, \quad \Theta\varphi, \quad \Theta'\varphi$$

geschrieben werden. Dann ist nach II. (10.), (12.), (17.), wenn $\sqrt{EG-F^2} = T$ gesetzt wird:

$$(2.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{T(m_1\,du + m_2\,dv)}{\sqrt{Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2}}, \\ \mathfrak{M}' &= \frac{(Em_2 - Fm_1)\,du + (Fm_2 - Gm_1)\,dv}{\sqrt{Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2}}, \end{aligned}$$

$$(3.)\quad \begin{aligned} \Theta\varphi &= \frac{m_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - m_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2}}, \\ \Theta'\varphi &= \frac{(Gm_1 - Fm_2)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - (Fm_1 - Em_2)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{T\sqrt{Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2}}. \end{aligned}$$

Man erkennt unmittelbar, daß $\Theta\varphi$ nichts anderes ist als die unendlichkleine Änderung der Funktion $\varphi(u, v)$ beim Fortgange längs der Kurve c, dividiert durch das Bogenelement dieser Kurve, und daß $\Theta'\varphi$ für die Kurve c' dieselbe Bedeutung hat. Solche Differentiationen längs Kurven sind seit *Lamé* explizite oder implizite häufig angewendet worden, und in Deutschland hat namentlich *v. Lilienthal* in einer Reihe von Abhandlungen einen systematischen Gebrauch von ihnen gemacht. Will man die Grundformeln in ihrer übersichtlichsten Gestalt erhalten, so hat man, wie eingangs erwähnt und im § II beschrieben, die Theta-Operationen an die Theorie eines Formensystems zu knüpfen und dann, wie diese Theorie es mit sich bringt, beständig am Leitfaden des Invariantenbegriffs vorzuschreiten.

Die Größen $\Theta\varphi$ und $\Theta'\varphi$ sollen als geometrische Ableitungen von φ bezeichnet werden.

Auf jeder der beiden Kurven c und c' erscheint eine bestimmte Richtung bevorzugt, die durch die Formeln (3.) selbst definiert wird und als positiv bezeichnet werden soll. Ihre Kosinus seien (A, B, C) für die Kurve c, (A', B', C') für c'. Dann ist

$$(4.)\qquad \begin{array}{lll} \Theta x = A, & \Theta y = B, & \Theta z = C; \\ \Theta' x = A', & \Theta' y = B', & \Theta' z = C'. \end{array}$$

Mit diesen Größen hängen die durch die Gleichungen

$$(5.)\qquad X = \frac{1}{T}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = D_a(y, z), \ldots$$

definierten Richtungskosinus der positiven Flächennormale mittels der Relationen

$$X = BC' - B'C, \ldots$$

zusammen; d. h. die positiven Richtungen der Kurven c und c' und der Normale sind, in dieser Reihenfolge, den positiven Richtungen der x-, y- und z-Achse äquivalent.

Führt man die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N ein, so erhält man in bekannter Weise die *Gauß*schen Gleichungen

$$(6.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} &= LX, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} &= MX, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} &= NX, \end{aligned}$$

die bei zyklischer Vertauschung von x, y, z bestehen bleiben und in denen die nach *Christoffel* mit $\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}$ bezeichneten Koeffizienten rationale Funktionen der Fundamentalgrößen erster Ordnung und ihrer ersten Ableitungen sind. In diesen Gleichungen kann man an die Stelle der partiellen Ableitungen erster Ordnung von x die ersten Richtungskosinus der Koordinatenlinien, $\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}$ und $\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}$, treten lassen, wie dies z. B. schon *Enneper* getan hat, und statt der zweiten Ableitungen die Größen

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

einführen. Unter der Annahme $F = 0$ erhält man dann, in der hier angewandten Bezeichnungsweise, Ausdrücke für ΘA, $\Theta A'$, $\Theta' A$, $\Theta' A'$, und zwar

als homogene lineare Funktionen von A, A', X, deren von den Fundamentalgrößen abhängige Koeffizienten sich leicht geometrisch deuten lassen. Die Richtungskosinus A, A' haben hierbei zunächst nur eine spezielle Bedeutung. Beachtet man aber, daß die eine Koordinatenlinie willkürlich angenommen werden kann, so sieht man, daß das auf diesem Wege gewonnene Gleichungssystem für irgend ein orthogonales Kurvenpaar (c, c') auf der Fläche gilt. Der Schluß liegt nahe, daß das abgeleitete und das *Gauß*sche System sich gegenseitig, und zwar auch unter der Annahme $F \gtrless 0$, ersetzen, wenn nur die Theta-Operationen durch die allgemeinen Formeln (3.) definiert werden. Es handelt sich darum, dies zu beweisen, und zwar natürlich nicht auf dem mühseligen Wege des Durchdifferentiierens, sondern nach einer Methode, bei der die Bedeutung der Gleichungssysteme in keinem Augenblick durch die bloß formale Rechnung verschleiert wird. Diesem Zweck dient folgende Überlegung.

Bezeichnet man die linken Seiten der Gleichungen (6.) der Reihe nach mit x_{11}, x_{12}, x_{22}, so kann man jene drei Gleichungen durch die eine

$$(7.)\qquad x_{11}\,du^2 + 2x_{12}\,du\,dv + x_{22}\,dv^2 = X(L\,du^2 + 2M du\,dv + N dv^2)$$

ersetzen, wenn man sie inbezug auf die Differentiale als Identität betrachtet. Die beiden Faktoren rechts sind kovariant in dem Sinne, daß sie beim Übergange von u, v zu beliebigen anderen Parametern u', v' gleich X' und $L'\,du'^2 + 2M'\,du'\,dv' + N'\,dv'^2$ werden, wo X', L', M', N' ebenso aus x, y, z, u', v' gebildet sind wie X, L, M, N aus x, y, z, u, v. Demnach muß auch die linke Seite von (7.) kovariant sein. In der Tat weiß man, daß für eine willkürliche Funktion $\varphi(u_1, u_2)$, wenn

$$(8.)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i\,\partial u_k} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu} = \varphi_{ik}$$

gesetzt wird, die quadratische Differentialform

$$\sum_{i,k} \varphi_{ik}\,du_i\,du_k = \Phi$$

eine Kovariante des Formenpaares $(\mathsf{A}, d\varphi)$ ist, und zwar ganz unabhängig von der Bedeutung der Koeffizienten a_{ik}. Ich habe diese Form als *Christoffel*sche Kovariante bezeichnet, weil ihre Kovarianteneigenschaft unmittelbar aus den Relationen folgt, die *Christoffel* in seiner grundlegenden Abhandlung „Über die Transformation der homogenen Differential-

ausdrücke zweiten Grades" hergeleitet hat.*) Doch ist hervorzuheben, daß die Differentialform als solche zuerst von *Gundelfinger* aufgestellt zu sein scheint.**)

Was die Größe X angeht, so läßt sich diese noch durch eine simultane Invariante des Formenpaares (A, dx) darstellen. Aus den Formeln (5.) und den Ausdrücken der Fundamentalgrößen erster Ordnung folgt nämlich unmittelbar

$$Y^2 + Z^2 = \frac{1}{T^2}\left[G\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + E\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]$$

oder

$$1 - X^2 = \Delta^1 x,$$

d. h.

$$X = \sqrt{1 - \Delta^1 x}, \tag{9.}$$

wenn die Quadratwurzel so fixiert wird, daß sie bei der Ausrechnung den Wert $D_a(y, z)$ liefert. Hierbei ist $\Delta^1 x$ der schon oben erwähnte Differentialparameter erster Ordnung von x, der für irgend eine Funktion φ und eine beliebige quadratische Differentialform A durch die Gleichung

$$\Delta^1\varphi = \sum_{i,k} \alpha_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \equiv H_a(\mathsf{A}, d\varphi^2) \tag{10.}$$

definiert wird. Er ist mit der algebraischen Fundamentalinvariante des Formenpaares $(\mathsf{A}, d\varphi)$ identisch.

Hiernach läßt sich das erste System der *Gauß*schen Gleichungen aus der Identität

$$\Phi - \sqrt{1 - \Delta^1\varphi}\, \mathsf{B} \equiv 0, \tag{11.}$$

deren linke Seite eine Kovariante des Formensystems $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, d\varphi)$ ist, für $\varphi = x$ ableiten. Die beiden anderen Systeme folgen, wie erwähnt, aus dem ersten durch zyklische Vertauschung von x, y, z.

Es erscheint unnötig, den Zeichen $\left\{ {ik \atop l} \right\}$, Φ, $\Delta^1\varphi$ einen die Beziehung zu A kennzeichnenden Index a beizufügen, weil funktionale Ausdrücke dieser Art, die mittels der Koeffizienten anderer Differentialformen gebildet sind, im folgenden nicht vorkommen.

Um nun die *Gauß*schen Gleichungen in der verlangten Weise umzuformen, hat man die linke Seite der Gleichung (11.) ebenso zu transfor-

*) Dieses Journal Bd. 70 (1869), S. 47—49.

**) Dieses Journal Bd. 85 (1878), S. 299.

mieren wie im § II die Form $\overline{\mathfrak{P}}$, nämlich durch Einführung der Formen $\mathfrak{M}_i$ statt der Differentiale, der Theta-Operationen statt der Differentiationen. Sodann sind die Koeffizienten von $\mathfrak{M}_1^2, \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_2^2$ einzeln gleich Null zu setzen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß nach dem zuerst beschriebenen Verfahren aus der mittleren *Gauß*schen Gleichung zwei Formeln hervorgehen, jenachdem man $\Theta A'$ oder $\Theta' A$ an die Stelle von $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ treten läßt. Es ist deshalb zweckmäßig, auch hier wieder, statt von $d\varphi$, zunächst von der beliebigen linearen Differentialform $\mathfrak{P}_0$ auszugehen und die Integrabilitätsbedingung erst später einzuführen.

Hierbei wird die quadratische *Christoffel*sche Kovariante Φ durch eine bilineare,

$$\sum_{i,k} p_{ik}\, du_i\, \delta u_k = \mathfrak{P}$$

vertreten, deren Koeffizienten durch die Gleichungen

$$\frac{\partial p_i}{\partial u_k} - \sum_{\nu} \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} p_\nu = p_{ik} \tag{12.}$$

definiert sind. Auch hier kann der Index a bei $\mathfrak{P}$ weggelassen werden. Der Beweis für die Kovarianteneigenschaft dieser Form unterscheidet sich von dem, den ich auf *Christoffel*scher Grundlage für die Kovarianz von Φ in den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft vom Jahre 1902, S. 63—66 gegeben habe, so wenig, daß er hier übergangen werden kann.

Die bilineare Kovariante, die aus $\mathfrak{P}$ durch Vertauschung von d mit δ hervorgeht, ist neben $\mathfrak{P}$ selbst nicht weiter in Betracht zu ziehen, weil, wie man sofort übersieht,

$$\sum_{i,k} p_{ik}\, du_i\, \delta u_k - \sum_{i,k} p_{ik}\, du_k\, \delta u_i = \overline{\mathfrak{P}}$$

ist.

Benutzt man jetzt die Gleichungen

$$du_i = \sum_{a} \mu_{ai}\, \mathfrak{M}_a,$$
$$\delta u_k = \sum_{\beta} \mu_{\beta k}\, \overline{\mathfrak{M}}_\beta$$

zur Umformung von $\mathfrak{P}$, so möge

$$\mathfrak{P} = \sum_{a,\beta} \mathfrak{p}_{a\beta}\, \mathfrak{M}_a\, \overline{\mathfrak{M}}_\beta \tag{13.}$$

werden. Die Größen $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}$ sind durch den Ansatz

$$(14.)\qquad \mathfrak{p}_{\alpha\beta} = \sum_{i,k} \mu_{\alpha i}\,\mu_{\beta k}\, p_{ik}$$

bestimmt, erscheinen also als algebraische simultane Invarianten des Formensystems ($\mathfrak{M}_i$) und der Form $\mathfrak{P}$. Wäre $\mathfrak{P}$ eine beliebige bilineare, $\mathfrak{M}_1, \dots$ beliebige lineare Formen, so müßte man bei diesen Ausdrücken stehen bleiben. Hier aber ist $\mathfrak{P}$ eine Differentialkovariante des Systems $(\mathsf{A}, \mathfrak{P}_0)$, wobei noch $\mathfrak{M}_1^2 + \mathfrak{M}_2^2 = \mathsf{A}$ ist. Es sind also statt der in den Koeffizienten p_{ik} vorkommenden Größen p_i die im vorigen Paragraphen definierten Invarianten $\mathfrak{p}_\nu$ des Systems $(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{M}_1, \dots)$, statt der Differentialquotienten $\frac{\partial p_i}{\partial u_k}$ die Invarianten $\vartheta_\lambda \mathfrak{p}_\nu$ einzuführen, endlich die durch die Formeln

$$(15.)\qquad \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_\lambda \alpha_{\nu\lambda} \left(\frac{\partial a_{i\lambda}}{\partial u_k} + \frac{\partial a_{k\lambda}}{\partial u_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_\lambda} \right)$$

definierten *Christoffel*schen Verbindungen mittels der Relationen

$$(16.)\qquad a_{ik} = \sum_\lambda m_{\lambda i}\, m_{\lambda k}$$

umzuformen.

Mit Hilfe der Gleichungen II (23.)

$$p_i = \sum_\lambda m_{\lambda i}\, \mathfrak{p}_\lambda$$

erhält man zunächst

$$\mathfrak{p}_{\alpha\beta} = \sum_{i,k} \mu_{\alpha i}\,\mu_{\beta k} \left[\sum_\lambda m_{\lambda i} \frac{\partial \mathfrak{p}_\lambda}{\partial u_k} + \mathfrak{p}_\lambda \frac{\partial m_{\lambda i}}{\partial u_k} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} \sum_\lambda m_{\lambda\nu}\, \mathfrak{p}_\lambda \right]$$

oder unter Heranziehung der elementaren Determinanten-Relationen II (25.):

$$\mathfrak{p}_{\alpha\beta} = \sum_k \mu_{\beta k} \frac{\partial \mathfrak{p}_\alpha}{\partial u_k} + \sum_{i,k,\lambda} \mu_{\alpha i}\,\mu_{\beta k}\, \mathfrak{p}_\lambda \left(\frac{\partial m_{\lambda i}}{\partial u_k} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} m_{\lambda\nu} \right),$$

d. h. nach II (16.)

$$(17.)\qquad \mathfrak{p}_{\alpha\beta} = \vartheta_\beta \mathfrak{p}_\alpha + \sum_\lambda \mathfrak{p}_\lambda \sum_{i,k} \mu_{\alpha i}\,\mu_{\beta k} \left(\frac{\partial m_{\lambda i}}{\partial u_k} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} m_{\lambda\nu} \right).$$

Die unter den Summenzeichen mit $\mathfrak{p}_\lambda\, \mu_{\alpha i}\, \mu_{\beta k}$ multiplizierte Größe ist aus den Koeffizienten der Formen $\mathfrak{M}_\lambda$ und A genau so gebildet wie p_{ik} aus denen von $\mathfrak{L}$ und A, kann also als Koeffizient von $du_i\, \delta u_k$ in der bilinearen *Christoffel*schen Kovariante von $\mathfrak{M}_\lambda$ und A betrachtet werden. Es sei noch

$$(18.)\qquad \frac{\partial m_{\lambda i}}{\partial u_k} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} m_{\lambda\nu} = m_{\lambda, ik}.$$



Multipliziert man, wie die Gleichung (17.) es erfordert, mit $\mu_{\alpha i}\,\mu_{\beta k}$ und summiert über i und k, so entsteht ein Ausdruck, der formell aus $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}$ hervorgeht, wenn die eben definierte Kovariante an die Stelle von $\mathfrak{P}_0$ tritt. Setzt man demgemäß

$$(19.)\qquad \sum_{i,k} \mu_{\alpha i}\,\mu_{\beta k}\, m_{\lambda,ik} = \mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\beta},$$

so folgt aus (17.)

$$(20.)\qquad \mathfrak{p}_{\alpha\beta} = \vartheta_\beta\,\mathfrak{p}_\alpha + \sum_\lambda \mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\beta}\,\mathfrak{p}_\lambda.$$

Die Differentialinvarianten $\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\beta}$ lassen sich noch durch die im § II, Gl. (26.) oder (28.) definierten Invarianten der Formen des Systems $(\mathfrak{M}_i)$ darstellen. Benutzt man nämlich die Gleichungen (15.), (16.) und die aus (16.) folgenden

$$(21.)\qquad \alpha_{ik} = \sum_\varrho \mu_{\varrho i}\,\mu_{\varrho k},$$

so findet man unter beständiger Anwendung der Relationen II (25.) ohne Schwierigkeit

$$(22.)\qquad \mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathfrak{m}}_{\lambda,\alpha\beta} + \overline{\mathfrak{m}}_{\alpha,\beta\lambda} + \overline{\mathfrak{m}}_{\beta,\alpha\lambda}\right).$$

Von den aus diesen Formeln in Verbindung mit

$$\overline{\mathfrak{m}}_{\lambda,\alpha\alpha} = 0, \qquad \overline{\mathfrak{m}}_{\lambda,\beta\alpha} = -\overline{\mathfrak{m}}_{\lambda,\alpha\beta}$$

folgenden Eigenschaften der Invarianten $\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\beta}$ sind die in den Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\alpha} = \overline{\mathfrak{m}}_{\alpha,\alpha\lambda},\\
&\mathfrak{m}_{\lambda,\lambda\beta} = 0,\\
&\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\lambda} = \overline{\mathfrak{m}}_{\lambda,\alpha\lambda},\\
&\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\beta} + \mathfrak{m}_{\alpha,\lambda\beta} = 0
\end{aligned}$$

enthaltenen für die Aufstellung des vollständigen Systems nützlich. Als von Null verschieden ergeben sich für $n=2$ vier Größen:

$$(23.)\qquad \begin{aligned}
&\mathfrak{m}_{1,21} = \overline{\mathfrak{m}}_{1,21} = \mathfrak{g}_1, &&\mathfrak{m}_{1,22} = \overline{\mathfrak{m}}_{2,21} = -\mathfrak{g}_2,\\
&\mathfrak{m}_{2,11} = \overline{\mathfrak{m}}_{1,12} = -\mathfrak{g}_1, &&\mathfrak{m}_{2,12} = \overline{\mathfrak{m}}_{2,12} = \mathfrak{g}_2.
\end{aligned}$$

Hiernach folgt schließlich aus (20.) und (13.)

$$(24.)\qquad \begin{aligned}
\mathfrak{P} = {} & (\vartheta_1\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{g}_1\mathfrak{p}_2)\,\mathfrak{M}_1\overline{\mathfrak{M}}_1 + (\vartheta_2\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{g}_2\mathfrak{p}_2)\,\mathfrak{M}_1\overline{\mathfrak{M}}_2\\
& + (\vartheta_1\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_1\mathfrak{p}_1)\,\mathfrak{M}_2\overline{\mathfrak{M}}_1 + (\vartheta_2\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{g}_2\mathfrak{p}_1)\,\mathfrak{M}_2\overline{\mathfrak{M}}_2.
\end{aligned}$$

Für $\mathfrak{P}_0 = d\varphi$, also $\mathfrak{p}_1 = \vartheta_1\varphi$, $\mathfrak{p}_2 = \vartheta_2\varphi$, und wenn

$$\mathfrak{M}',\ \mathfrak{M},\ \Theta\varphi,\ \Theta'\varphi,\ g,\ g',\ \mathfrak{F}$$

für

$$\mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{M}_2,\ \vartheta_1\varphi,\ \vartheta_2\varphi,\ \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{P}$$

geschrieben wird, ist

$$(25.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{F} = (\Theta\Theta\varphi - g\Theta'\varphi)\,\mathfrak{M}'\overline{\mathfrak{M}}' + (\Theta'\Theta\varphi + g'\Theta'\varphi)\,\mathfrak{M}'\overline{\mathfrak{M}} \\ + (\Theta\Theta'\varphi + g\Theta\varphi)\,\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{M}}' + (\Theta'\Theta'\varphi - g'\Theta\varphi)\,\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{M}}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von $\mathfrak{M}'\overline{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{M}}'$ sind einander gleich auf Grund der Integrabilitätsbedingung II (34.), die jetzt die Form

$$(26.)\qquad \Theta'\Theta\varphi - \Theta\Theta'\varphi = g\Theta\varphi - g'\Theta\varphi$$

annimmt und in der g und g' nach II (33.), (31.) die Werte haben

$$(27.)\qquad \begin{aligned} g &= -\frac{1}{T}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{Gm_1 - Fm_2}{\sqrt{Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{Fm_1 - Em_2}{\sqrt{Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2}}\right\}, \\ g' &= -\frac{1}{T}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{Tm_2}{\sqrt{Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{Tm_1}{\sqrt{Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2}}\right\}. \end{aligned}$$

Nun hat man zweitens die quadratische Differentialform

$$\mathsf{B} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,du^2 = \sum_{i,k} b_{ik}\,du_i\,du_k$$

oder, wenn man will, die zugehörige bilineare

$$\mathfrak{B} = \sum_{i,k} b_{ik}\,du_i\,\delta u_k \qquad (b_{ki} = b_{ik})$$

durch Einführung der Formen $\mathfrak{M}_i$ umzugestalten. Die Werte der neuen Koeffizienten sind aus

$$\mathfrak{B} = \sum_{\alpha,\beta} \mathfrak{M}_\alpha\,\overline{\mathfrak{M}}_\beta \sum_{i,k} \mu_{\alpha i}\,\mu_{\beta k}\,b_{ik}$$

sofort abzulesen, und es sei

$$(28.)\qquad \sum_{i,k} \mu_{\alpha i}\,\mu_{\beta k}\,b_{ik} = \mathfrak{b}_{\alpha\beta},$$

sodaß

$$\mathfrak{B} = \sum_{\alpha,\beta} \mathfrak{b}_{\alpha\beta}\,\mathfrak{M}_\alpha\,\overline{\mathfrak{M}}_\beta$$

wird. Setzt man im einzelnen

$$(29.)\qquad \mathfrak{b}_{11} = \frac{Nm_1^2 - 2Mm_1m_2 + Lm_2^2}{Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2} = n$$

$$(29^a.)\quad \mathfrak{b}_{22} = \frac{N(Em_2 - Fm_1)^2 - 2M(Em_2 - Fm_1)(Fm_2 - Gm_1) + L(Fm_2 - Gm_1)^2}{T^2(Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2)} = n',$$

$$(30.)\quad \mathfrak{b}_{12} = \frac{(FN - GM)m_1^2 - (EN - GL)m_1m_2 + (EM - FL)m_2^2}{T(Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2)} = t,$$

so erhält man

$$(31.)\qquad \mathfrak{B} = n\mathfrak{M}'\overline{\mathfrak{M}}' + t(\mathfrak{M}'\overline{\mathfrak{M}} + \mathfrak{M}\overline{\mathfrak{M}}') + n'\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{M}}.$$

Da der zweite und dritte Koeffizient sowohl in $\mathfrak{F}$ wie in $\mathfrak{B}$ einander gleich sind, so verschwindet die bilineare Kovariante $\mathfrak{F} - \sqrt{1 - \Delta^1\varphi}\,\mathfrak{B}$ gleichzeitig mit der quadratischen $\Phi - \sqrt{1 - \Delta^1\varphi}\,\mathsf{B}$, und man findet als den drei ersten *Gauß*schen Gleichungen äquivalent folgende vier:

$$(32.)\qquad \begin{aligned} \Theta A &= gA' + nX, \qquad & \Theta' A &= -g'A' + tX, \\ \Theta A' &= -gA + tX, \qquad & \Theta' A' &= g'A + n'X. \end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung der hier auftretenden Größen n, n', t, g, g' ist bekannt.

Um die Form dieser Gleichungen von der der ursprünglichen (6.) zu unterscheiden, könnte man sie als invariant, nämlich im Gebiete der Differentialformen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathfrak{M}_0$ und dx, bezeichnen. Allein bei durchgehendem Gebrauch dieser Benennung würde es sich nicht vermeiden lassen, von der nicht-invarianten Form einer Kovariante oder Invariante zu sprechen. Infolgedessen ist es zweckmäßiger, die Unterscheidung der beiden Gestalten, in denen diese und andere, sogleich zu erwähnende Gleichungssysteme in der Flächentheorie erscheinen, von einer mehr äußerlichen Eigenschaft der Formeln herzunehmen. Die Gleichungen (6.) enthalten die Differentialquotienten der kartesischen Koordinaten, die Richtungskosinus der Normale und die Fundamentalgrößen lediglich rational; dagegen kommt in den Definitionsgleichungen für $\Theta\varphi$ und $\Theta'\varphi$ noch eine Quadratwurzel vor, die demnach im allgemeinen auch in den mittels der Theta-Operationen gebildeten Rechnungsausdrücken enthalten ist. Hiernach soll von den beiden Gleichungsformen (6.) und (32.) die erste als rational, die zweite als irrational bezeichnet werden.

IV.

Den *Gauß*schen Gleichungen stehen im System der flächentheoretischen Grundformeln die *Weingarten*schen zur Seite, vermöge deren die ersten Ableitungen der Richtungskosinus der Normale als homogene lineare Funktionen

der ersten Ableitungen der entsprechenden kartesischen Koordinaten dargestellt werden; die Koeffizienten sind rationale Funktionen der Fundamentalgrößen. Beim Beweise dieser Gleichungen tritt gewöhnlich nicht klar hervor, daß sie, wie es doch sein muß, aus den *Gauß*schen folgen. Zwar kann man dies einfach dadurch prüfen, daß man den Ausdruck eines Richtungskosinus differentiiert und für die zweiten Ableitungen der kartesischen Koordinaten ihre Werte aus den *Gauß*schen Gleichungen einsetzt. Aber eine deutlichere Einsicht gewinnt man, wenn man, von dem hier eingenommenen Standpunkt aus, den Beweis an die Theorie der Kovarianten knüpft, was auf verschiedenen Wegen geschehen kann.

Man bestimme statt der einzelnen partiellen Ableitungen von X das Differential dX und gehe dabei von der bereits benutzten Gleichung $X = \sqrt{1 - \Delta^1 x}$ aus. Dann handelt es sich also um die Berechnung des Differentials von $\Delta^1 x$, oder allgemeiner des Differentials einer simultanen Invariante von A und $\mathfrak{P}_0$,

$$H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{P}_0^2) = \sum_{i,k} \alpha_{ik} p_i p_k,$$

und zwar unter Einführung der Koeffizienten $p_{\varkappa\lambda}$ der *Christoffel*schen Kovariante an Stelle der Ableitungen der Größen p_ν.

Wir lassen, wie vorher, $\mathfrak{P}_0$ zunächst beliebig, ohne auf die für $\mathfrak{P}_0 = dx$ erfüllte Integrabilitätsbedingung Rücksicht zu nehmen. Die Bildung des Differentials ergibt

$$d\sum_{i,k} \alpha_{ik} p_i p_k = \sum_{i,k,\nu} \left[\alpha_{ik}\left(p_i \frac{\partial p_k}{\partial u_\nu} + p_k \frac{\partial p_i}{\partial u_\nu}\right) + p_i p_k \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial u_\nu}\right] du_\nu$$

$$= \sum_\nu du_\nu \sum_{i,k}\left(2\alpha_{ik} p_i \frac{\partial p_k}{\partial u_\nu} + p_i p_k \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial u_\nu}\right).$$

Die Ableitungen der Größen α_{ik} lassen sich mittels der schon wiederholt angewendeten Relationen II (25.) durch die der Größen $a_{\varkappa\lambda}$ und damit durch die bei Einführung der $p_{k\nu}$ ohnedies vorkommenden Verbindungen $\left\{ {k\nu \atop \varrho} \right\}$ darstellen. Durch Differentiation jener Relationen und Auflösung des entstehenden Gleichungssystems folgt nämlich

$$\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial u_\nu} = -\sum_{\varkappa,\lambda} \alpha_{\varkappa k} \alpha_{i\lambda} \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial u_\nu}$$

und weiter, da

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_\nu} = \sum_\varrho \left[a_{\varrho i} \left\{ {\nu k \atop \varrho} \right\} + a_{\varrho k} \left\{ {\nu i \atop \varrho} \right\} \right]$$

ist,

$$\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial u_\nu} = - \sum_\lambda \left[\alpha_{i\lambda} \left\{ {\nu \lambda \atop k} \right\} + \alpha_{k\lambda} \left\{ {\nu \lambda \atop i} \right\} \right].$$

Setzt man diese Ausdrücke und, aus III (12.), die der Ableitungen $\frac{\partial p_k}{\partial u_\nu}$ ein, so ergibt sich

$$\tfrac{1}{2} d \sum_{i,k} \alpha_{ik} p_i p_k = \sum_\nu du_\nu \sum_{i,k} \Big[\alpha_{ik} p_i (p_{k\nu} + \sum_\varrho \left\{ {k\nu \atop \varrho} \right\} p_\varrho)$$
$$- \tfrac{1}{2} p_i p_k \sum_\lambda \Big(\alpha_{i\lambda} \left\{ {\nu \lambda \atop k} \right\} + \alpha_{k\lambda} \left\{ {\nu \lambda \atop i} \right\} \Big) \Big].$$

Der Teil des Koeffizienten von du_ν, der $p_{k\nu}$ nicht enthält, läßt sich schreiben:

$$\sum_{i,k,\varrho} \alpha_{i\varrho} p_i p_k \left\{ {\varrho \nu \atop k} \right\} - \tfrac{1}{2} \sum_{i,k,\varrho} \alpha_{i\varrho} p_i p_k \left\{ {\nu \varrho \atop k} \right\} - \tfrac{1}{2} \sum_{i,k,\varrho} \alpha_{k\varrho} p_i p_k \left\{ {\nu \varrho \atop i} \right\}$$
$$= \tfrac{1}{2} \sum_{i,k,\varrho} \alpha_{i\varrho} p_i p_k \left\{ {\varrho \nu \atop k} \right\} - \tfrac{1}{2} \sum_{i,k,\varrho} \alpha_{k\varrho} p_i p_k \left\{ {\nu \varrho \atop i} \right\}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber, wie man sofort sieht, wenn man in der zweiten Summe i mit k vertauscht. Hiernach wird

$$(1.) \qquad d \sum_{i,k} \alpha_{ik} p_i p_k = 2 \sum_{i,k,\nu} \alpha_{ik} p_i p_{k\nu} du_\nu,$$

und das Differential der Invariante $H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{P}_0^2)$ ist damit als simultane Kovariante von $\mathsf{A}, \mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}$ dargestellt.

Speziell folgt für $\mathfrak{P}_0 = d\varphi$, also $p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$, $p_{k\nu} = \varphi_{k\nu}$:

$$(2.) \qquad d\Delta^1 \varphi = 2 \sum_{i,k,\nu} \alpha_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \varphi_{k\nu} du_\nu.$$

Ist weiter, wie für $\varphi = x$,

$$\Phi - \sqrt{1 - \Delta^1 \varphi}\, \mathsf{B} \equiv 0,$$

also

$$(3.) \qquad \varphi_{k\nu} = \sqrt{1 - \Delta^1 \varphi}\, b_{k\nu},$$

so hat man

$$d\Delta^1 \varphi = 2 \sum_{i,k,\nu} \alpha_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \sqrt{1 - \Delta^1 \varphi}\, b_{k\nu} du_\nu,$$

d. h., was hier gebraucht wird,

$$(4.)\qquad d\sqrt{1-\Delta^1\varphi} = -\sum_{i,k,\nu} \alpha_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} b_{k\nu}\, du_\nu$$

oder, für

$$(5.)\qquad -\sum_k \alpha_{ik} b_{k\nu} = \eta_{i\nu}:$$

$$(6.)\qquad d\sqrt{1-\Delta^1\varphi} = \sum_{i,\nu} \eta_{i\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} du_\nu.$$

Speziell ist für $\varphi = x$

$$(7.)\qquad dX \equiv \sum_\nu \frac{\partial X}{\partial u_\nu} du_\nu = \sum_\nu du_\nu \sum_i \eta_{i\nu}\frac{\partial x}{\partial u_i},$$

woraus sich die *Weingarten*schen Gleichungen, und zwar in der gewöhnlichen rationalen Form

$$(8.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \eta_{11}\frac{\partial x}{\partial u} + \eta_{21}\frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \eta_{12}\frac{\partial x}{\partial u} + \eta_{22}\frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned}$$

ergeben. Um zu der irrationalen überzugehen, hat man nur die Kovariante auf der rechten Seite von (1.) durch Einführung der Kovarianten $\mathfrak{M}_i$ umzuwandeln, dann wieder $\mathfrak{P}_0 = d\varphi$ zu setzen und die für $\varphi = x$ geltende Gleichung (3.) zu benutzen. Es wird

$$\begin{aligned} \sum_{i,k,\nu} \alpha_{ik} p_i p_{k\nu}\, du_\nu &= \sum_{i,k,\nu,\varrho,\lambda} \alpha_{ik} p_{k\nu}\, m_{\varrho i}\, \mathfrak{p}_\varrho\, \mu_{\lambda\nu}\, \mathfrak{M}_\lambda \\ &= \sum_{i,k,\nu,\varrho,\lambda,\sigma} m_{\varrho i}\, \mu_{\sigma i}\, \mu_{\sigma k}\, \mu_{\lambda\nu}\, p_{k\nu}\, \mathfrak{p}_\varrho\, \mathfrak{M}_\lambda \\ &= \sum_{k,\nu,\varrho,\lambda} \mu_{\varrho k}\, \mu_{\lambda\nu}\, p_{k\nu}\, \mathfrak{p}_\varrho\, \mathfrak{M}_\lambda, \end{aligned}$$

d. h. unter der Voraussetzung (3.)

$$d\sqrt{1-\Delta^1\varphi} = -\sum_{k,\nu,\varrho,\lambda} \mu_{\varrho k}\, \mu_{\lambda\nu}\, b_{k\nu}\, \mathfrak{p}_\varrho\, \mathfrak{M}_\lambda.$$

Hier treten die bereits vorgekommenen Größen

$$\sum_{k,\nu} \mu_{\varrho k}\, \mu_{\lambda\nu}\, b_{k\nu} = \mathfrak{b}_{\varrho\lambda}$$

wieder auf, deren Werte einzeln durch die Formeln III (29.), (30.) bestimmt wurden. Die Gleichung

$$dX \equiv \sum_\lambda \vartheta_\lambda X.\mathfrak{M}_\lambda = -\sum_{\varrho,\lambda} \mathfrak{b}_{\varrho\lambda}\, \vartheta_\varrho x.\mathfrak{M}_\lambda$$

zerspaltet sich in die beiden:

$$\vartheta_i X = -\sum_\varrho \mathfrak{b}_{\varrho i} \vartheta_\varrho x$$

oder

$$(9.) \qquad \begin{aligned} \Theta X &= -nA - tA', \\ \Theta' X &= -tA - n'A'. \end{aligned}$$

Die vorangehenden Untersuchungen könnten, wie unmittelbar ersichtlich, so angeordnet werden, daß sie die Beziehungen zwischen den linken Seiten der auf Null gebrachten Gleichungen III (6.) und (32.), IV (8.) und (9.) hervortreten ließen, statt derer zwischen den Gleichungen selbst. Ferner leuchtet ein, daß die gegenseitige Abhängigkeit der Gleichungssysteme gilt, gleichgültig ob $\mathfrak{M}_0$ beliebig gelassen oder spezialisiert wird. Setzt man nun die Kurve c als die eine und demnach c' als die andere Krümmungslinie voraus, so daß die geodätische Torsion t gleich Null wird, so gehen, nach den im 111. Bande dieses Journals eingeführten Bezeichnungen, $\Theta\varphi$, $\Theta'\varphi$, A, A' in $\Theta_2\varphi$, $\Theta_1\varphi$, X_2, X_1, die Normalkrümmungen n, n' in die beiden Hauptkrümmungen über, und die Gleichungen III (32.), IV (9.) werden mit den a. a. O. S. 341 und 342 unter (7.), (8.), (9.) aufgeführten identisch. Speziell liefert das letzte Gleichungssystem die Formeln von *Rodrigues*, unter der Annahme beliebiger Parameter.

Wird auf die Übereinstimmung der Gleichungen (9.) mit den *Weingarten*schen kein Gewicht gelegt, sondern kommt es nur darauf an, sie überhaupt aus schon vorhandenen Formeln herzuleiten, so kann dies nach derselben einfachen Methode geschehen, durch die in der Theorie der Raumkurven das dritte System *Frenet*scher Formeln aus den beiden ersten gefolgert wird. Man wendet die Theta-Operationen auf die Identität

$$A^2 + A'^2 + X^2 = 1$$

an und setzt für $\Theta A, \dots \Theta' A'$ ihre Werte aus III (32.) ein.

V.

Das System der Grundformeln der Flächentheorie findet seinen Abschluß in den drei Fundamentalgleichungen, die für die *Gauß-Weingarten*schen Gleichungen die Bedeutung von Integrabilitätsbedingungen haben. Sie können aus III (6.) und IV (7.) in bekannter Weise hergeleitet werden. Das Wesentliche dabei ist, daß man für bestimmte Ableitungen dritter Ordnung der kartesischen Koordinaten je zwei verschiedene Ausdrücke bildet

und aus den durch ihre Gleichsetzung entstehenden Relationen auch die zweiten Differentialquotienten eliminiert. Die Durchführung der Rechnung liefert die Fundamentalgleichungen in rationaler Form. Daß die drei irrationalen Relationen, die man aus III (32.) und IV (9.) durch Anwendung der Gleichung IV (26.) auf $\varphi = A$; $\varphi = A'$ und zyklische Vertauschung von A, B, C; A', B', C' erhält, von ihnen nur der äußeren Gestalt nach verschieden sein können, ist nach dem bisher Bewiesenen von vornherein klar. Nachdem aber das Bestehen der *Gauß*schen und der *Weingarten*schen Gleichungen, und zwar in beiden Formen, an das identische Verschwinden einer einzigen Kovariante geknüpft worden ist, erscheint es wünschenswert, auch die beiden eben erwähnten Gleichungssysteme nur als verschiedene Ausdrucksformen einer und derselben Identität zu kennzeichnen. Und zwar nicht nur der Einheitlichkeit der Methode wegen, sondern weil das erstgenannte Verfahren bekanntlich zuviel, nämlich sechs Gleichungen liefert, die erst auf drei zurückgeführt werden müssen.

Was die zweite und dritte Fundamentalgleichung angeht, so hat *Weingarten* schon 1884 in der Festschrift der Technischen Hochschule zu Berlin*) bewiesen, daß ihre linken Seiten in einfacher Weise zu den Koeffizienten einer linearen Kovariante in Beziehung gesetzt werden können. Behufs Herleitung ihrer irrationalen Form könnte man sich unmittelbar auf dieses Ergebnis stützen. Doch sollen die drei Fundamentalgleichungen zusammen behandelt und ihre Herleitung an eine allgemeine formentheoretische Untersuchung angeschlossen werden.

Ebenso wie schon die linken Seiten der *Gauß*schen Gleichungen III (6.) darauf führen, in der Flächentheorie statt der Differentialquotienten zweiter Ordnung der Koordinaten die Koeffizienten der *Christoffel*schen Kovariante für $\varphi = x, y, z$ zu verwerten, so hat man auch statt der höheren Ableitungen die Koeffizienten derjenigen Kovarianten einzuführen, die nach dem *Christoffel*schen Verfahren (dieses Journal Bd. 70, S. 56—57) aus Φ abgeleitet werden können. Es sei

$$\sum_{i,k} c_{ik}\, du_i\, du_k = \Gamma$$

eine beliebige quadratische Differentialform. Wird

$$(1.)\qquad \frac{\partial c_{ik}}{\partial u_l} - \sum_{\nu} \left(c_{i\nu} \begin{Bmatrix} kl \\ \nu \end{Bmatrix} + c_{\nu k} \begin{Bmatrix} il \\ \nu \end{Bmatrix} \right) = c_{ikl}$$

*) Über die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen, S. 19—20.

gesetzt, so ist nach *Christoffel* die dreifach lineare Differentialform

(2.) $$\sum_{i,k,l} c_{ikl}\, du_i\, \delta u_k\, \mathfrak{d} u_l = \mathfrak{C}_3,$$

die uns hier allein angeht, eine Kovariante. Für $c_{ki} = c_{ik}$ ist

(3.) $$c_{ikl} = c_{kil};$$

dies wollen wir annehmen, denn von einer allgemeinen bilinearen statt von einer quadratischen Differentialform auszugehen ist für das Folgende nicht erforderlich.

Setzt man $c_{ik} = b_{ik}$ und macht die drei Differentiale $du, \delta u, \mathfrak{d} u$ einander gleich, so geht $\mathfrak{C}_3$ in die kubische Kovariante H über, auf die man, wie ich schon vor längerer Zeit gezeigt habe, durch eine Aufgabe aus der Theorie der Normalschnitte geführt wird.

Setzt man dagegen

(4.) $$c_{ik} = \varphi_{ik} - \sqrt{1 - \Delta^1 \varphi}\; b_{ik}$$

und nimmt dann $\varphi = x$, so verschwinden infolge von IV (3.) sämtliche Koeffizienten von $\mathfrak{C}_3$. Aus dieser einfachen Bemerkung erhält man freilich zunächst nur den Inhalt des Gleichungssystems wieder, das durch einmalige Differentiation aus dem *Gauß*schen hervorgeht. Was man braucht, sind dagegen Gleichungen, aus denen die Ableitungen dritter und zweiter Ordnung verschwunden sind.

Das Hilfsmittel, das man hierfür aus der Formentheorie entnehmen kann, ist die Bildung einer linearen Differentialkovariante von $\mathfrak{C}_3$ und A. Vertauscht man nämlich in der Formel (2.) die Zeichen d, δ und $\mathfrak{d}$ auf alle möglichen Weisen und subtrahiert jedesmal den entstehenden Ausdruck von $\mathfrak{C}_3$, so findet man, von solchen Formen abgesehen, die infolge von (3.) identisch verschwinden, die Kovariante, die ich als *Weingarten*sche bezeichnet habe:

(5.) $$\sum_i \frac{c_{i12} - c_{i21}}{T}\, du_i = \mathsf{W}_a(\Gamma).$$

Ihre Koeffizienten ergeben sich für $k = 1$, $l = 2$ aus

(6.) $$c_{ikl} - c_{ilk} = \frac{\partial c_{ik}}{\partial u_l} - \sum_\nu c_{\nu k} \begin{Bmatrix} il \\ \nu \end{Bmatrix} - \frac{\partial c_{il}}{\partial u_k} + \sum_\nu c_{\nu l} \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix}.$$

Eine leichte Rechnung lehrt nun, daß wenn man, den Gleichungen (4.) gemäß, c_{ik} von der Form $\varphi_{ik} + \lambda b_{ik}$ annimmt,

(7.) $$\mathsf{W}_a(\Gamma) = \mathsf{W}_a(\Phi) + \lambda \mathsf{W}_a(\mathsf{B}) + D_a(\mathsf{B}, d\lambda)$$

wird, so daß es sich um die Herstellung von drei verschiedenen Ausdrücken handelt. Zunächst findet sich bei $\mathsf{W}_a(\Phi)$, daß, wie es oben als Erfordernis hingestellt wurde, nicht nur die dritten, sondern auch die zweiten Ableitungen von φ wegfallen. Wird

(8.) $$\frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ \nu \end{Bmatrix}}{\partial u_k} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix}}{\partial u_l} + \sum_{\varrho} \left(\begin{Bmatrix} il \\ \varrho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varrho k \\ \nu \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ik \\ \varrho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varrho l \\ \nu \end{Bmatrix} \right) = \{i\nu lk\}$$

gesetzt, so erhält man aus

(9.) $$\varphi_{lk} - \varphi_{kl} = \sum_{\nu} \{i\nu lk\} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu}$$

die Koeffizienten dieser Kovariante. Die von $\mathsf{W}_a(\mathsf{B})$ sind aus (6.) ohne weiteres abzuschreiben, wenn b für c gesetzt wird, und auch

$$D_a(\mathsf{B}, d\lambda) = \frac{1}{T} \begin{vmatrix} b_{11} du_1 + b_{12} du_2, & \dfrac{\partial \lambda}{\partial u_1} \\ b_{12} du_1 + b_{22} du_2, & \dfrac{\partial \lambda}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

bedarf, so lange nur die rationale Form der Ausdrücke in Betracht kommt, keiner Umgestaltung.

Soll nun z. B. $\mathsf{W}_2(\mathsf{B})$ in die irrationale Form gesetzt werden, so kann man damit beginnen, die trilineare Form

$$\sum_{i,k,l} b_{ikl}\, du_i\, \delta u_k\, \mathfrak{d} u_l = \mathfrak{B}_3$$

zu transformieren, um dann erst zu der *Weingarten*schen Kovariante zurückzukehren. Es sei

$$\sum_{\nu} m_{\nu}\, \mathfrak{d} u_{\nu} = \mathfrak{M}_{\nu},$$

(10.) $$\mathfrak{B}_3 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \mathfrak{b}_{\alpha\beta\gamma}\, \mathfrak{M}_\alpha \overline{\mathfrak{M}}_\beta \bar{\bar{\mathfrak{M}}}_\gamma;$$

dann sind die Invarianten

(11.) $$\mathfrak{b}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i,k,l} u_{\alpha i} u_{\beta k} u_{\gamma l} b_{ikl}$$

zu berechnen. Worauf es dabei ankommt und wie die Rechnung zu führen ist, ergibt sich aus der im vorhergehenden angestellten Transformation linearer und bilinearer Differentialformen ohne weiteres. Man kann deshalb,

statt dasselbe Verfahren nochmals anzuwenden, zur Erreichung des beabsichtigten Zweckes die landläufige Methode der Spezialisierung der Parameter benutzen, die auf kürzerem, wenn auch freilich nicht so übersichtlichem Wege zum Ziel führt. Da man auf Grund der eingangs gegebenen Definitionen jederzeit in der Lage ist, zu den allgemeinsten Formeln zurückzukehren, so liegt hier kein Grund vor, dieser Methode auszuweichen.

Die Parameter u', v' oder u'_1, u'_2 seien so gewählt, daß die Linien $v' = \text{const.}$ mit den durch $\mathfrak{M}_0 = 0$ bestimmten Kurven c zusammenfallen, während $u' = \text{const.}$ die orthogonalen Trajektorien liefert. Aus

$$\mathfrak{M}_0 \equiv m_1\, du_1 + m_2\, du_2 = m'_1\, du'_1 + m'_2\, du'_2$$

folgt dann $m'_1 = 0$, und ferner ist $F' = 0$. Bedeutet noch ε das Vorzeichen von m'_2, ist also

$$\varepsilon m'_2 > 0,$$

so hat man

$$\mu'_{ii} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a'_{ii}}}, \qquad \mu'_{ik} = 0 \qquad (i \gtrless k),$$

sowie

$$\vartheta_i \varphi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a'_{ii}}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u'_i},$$

wenn beim Übergange von u_1, u_2 zu u'_1, u'_2

$$\varphi(u_1, u_2) = \bar{\varphi}(u'_1, u'_2)$$

wird. Der Ausdruck für $\mathfrak{b}_{\alpha\beta\gamma}$ reduziert sich auf ein einziges Glied:

$$(12.) \qquad \mathfrak{b}_{\alpha\beta\gamma} = \mu'_{\alpha\alpha}\, \mu'_{\beta\beta}\, \mu'_{\gamma\gamma}\, b'_{\alpha\beta\gamma},$$

und es müssen nun die in

$$b'_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial b'_{\alpha\beta}}{\partial u'_\gamma} - \sum_\nu \left(b'_{\alpha\nu} \begin{Bmatrix} \beta\gamma \\ \nu \end{Bmatrix}' + b'_{\nu\beta} \begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \nu \end{Bmatrix}' \right)$$

vorkommenden Ableitungen nicht-invarianter Größen durch Invarianten und durch geometrische Ableitungen von solchen ersetzt werden. Die dabei in Betracht kommenden Größen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{b}_{11}, \mathfrak{b}_{12}, \mathfrak{b}_{22}$ haben für die speziellen Parameter die Werte

$$\mathfrak{g}_1 = -\frac{\varepsilon}{2a'_{11}\sqrt{a'_{22}}} \frac{\partial a'_{11}}{\partial u'_2},$$

$$\mathfrak{g}_2 = -\frac{\varepsilon}{2a'_{22}\sqrt{a'_{11}}} \frac{\partial a'_{22}}{\partial u'_1},$$

$$(13.)\qquad \mathfrak{b}_{ik} = \frac{b'_{ik}}{\sqrt{a'_{ii}\,a'_{kk}}}.$$

Versteht man da, wo eine Größe mit nur einem Index i behaftet ist, unter k die von i verschiedene Zahl des Paares $(1, 2)$, so kann man die beiden Formeln für $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ noch in

$$(14.)\qquad \mathfrak{g}_i = -\frac{\varepsilon}{2a'_{ii}\sqrt{a'_{kk}}}\frac{\partial a'_{ii}}{\partial u'_k}$$

zusammenziehen.

Für die Koeffizienten des transformierten Ausdruckes von $\mathfrak{G}_3$ ergeben sich nach Durchführung der Rechnung die Formeln

$$(15.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{b}_{iii} &= \vartheta_i\,\mathfrak{b}_{ii} - 2\,\mathfrak{b}_{ik}\,\mathfrak{g}_i, \\ \mathfrak{b}_{iik} &= \vartheta_k\,\mathfrak{b}_{ii} + 2\,\mathfrak{b}_{ik}\,\mathfrak{g}_k, \\ \mathfrak{b}_{iki} &= \vartheta_i\,\mathfrak{b}_{ik} + (\mathfrak{b}_{ii} - \mathfrak{b}_{kk})\,\mathfrak{g}_i, \end{aligned}$$

die wegen der aus $b_{ikl} = b_{kil}$ folgenden Eigenschaft $\mathfrak{b}_{ikl} = \mathfrak{b}_{kil}$ ausreichen.

Vertauscht man jetzt behufs Herleitung von $\mathsf{W}_a(\mathsf{B})$ wieder δu mit $\mathfrak{d}u$, d. h. $\overline{\mathfrak{M}}$ mit $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$, und subtrahiert, so erhält man nach Absonderung eines kovarianten Faktors

$$(16.)\qquad \mathsf{W}_a(\mathsf{B}) = \sum_i (\mathfrak{b}_{i12} - \mathfrak{b}_{i21})\,\mathfrak{M}_i,$$

wo die Koeffizienten in den Bezeichnungen der Flächentheorie die Werte haben

$$(17.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{b}_{112} - \mathfrak{b}_{121} &= \Theta' n + 2tg' - (\Theta t + (n - n')g), \\ \mathfrak{b}_{212} - \mathfrak{b}_{221} &= \Theta' t + (n' - n)g' - (\Theta n' + 2tg). \end{aligned}$$

Wird dann weiter, entsprechend (16.),

$$(18.)\qquad \mathsf{W}_a(\Phi) = \sum_i (\mathfrak{f}_{i12} - \mathfrak{f}_{i21})\,\mathfrak{M}_i$$

gesetzt, so findet sich beim Hindurchgehen durch die speziellen Parameter

$$(19.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{f}_{112} - \mathfrak{f}_{121} &= -(\vartheta_1\,\mathfrak{g}_2 + \vartheta_2\,\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_1^2 - \mathfrak{g}_2^2)\,\vartheta_2\,\varphi, \\ \mathfrak{f}_{212} - \mathfrak{f}_{221} &= (\vartheta_1\,\mathfrak{g}_2 + \vartheta_2\,\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_1^2 - \mathfrak{g}_2^2)\,\vartheta_1\,\varphi, \end{aligned}$$

also für

$$(20.)\qquad \vartheta_1\,\mathfrak{g}_2 + \vartheta_2\,\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_1^2 - \mathfrak{g}_2^2 = \Theta g' + \Theta' g - g^2 - g'^2 = K_{am}:$$

$$(21.)\qquad \mathsf{W}_a(\Phi) = K_{am}(\vartheta_1\varphi\,\mathfrak{M}_2 - \vartheta_2\varphi\,\mathfrak{M}_1).$$

Sie lassen zunächst das *Weingarten*sche Resultat, daß $\mathsf{W}_a(\mathsf{B})$ für sich allein gleich Null ist, wieder hervortreten. Und das Verschwinden des Restes von $\mathsf{W}_a(\Gamma)$ wird dann durch die erste Bedingungsgleichung wiedergegeben.

Die zweite und dritte Gleichung,

$$\text{(28.)}\qquad \begin{aligned} \Theta' n - \Theta t + 2tg' - (n - n')\,g &= 0, \\ \Theta n' - \Theta' t + 2tg\ - (n' - n)\,g' &= 0, \end{aligned}$$

sind unmittelbar der zweiten und dritten Fundamentalgleichung äquivalent, die in der gewöhnlichen, rationalen Form aus

$$b_{112} - b_{121} = 0, \qquad b_{221} - b_{212} = 0$$

folgen. Auch würden sich wieder vermöge der Kovarianz von $\mathsf{W}_a(\mathsf{B})$ die Beziehungen zwischen den linken Seiten beider Gleichungssysteme ohne weiteres hinschreiben lassen.

Die erste Gleichung dagegen,

$$\text{(29.)}\qquad nn' - t^2 = \Theta' g + \Theta g' - g^2 - g'^2,$$

erscheint nicht sofort als der ersten Fundamentalgleichung, d. h. dem *Gauß*schen Satze vom Krümmungsmaß, gleichbedeutend. Denn links und rechts stehen hier Kurveninvarianten, nämlich solche geometrischen Größen, die durch die Kurve c bestimmt und ihrer Natur nach von der Wahl der Parameter unabhängig sind. Was noch fehlt, ist der Nachweis, daß die eine und damit auch die andere Seite von (29.) für alle orthogonalen Kurvenpaare denselben Wert behält, also eine Punktinvariante ist. Geht man nun etwa links zur rationalen Form zurück, so findet man

$$\text{(30.)}\qquad nn' - t^2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \equiv K_{ab}.$$

Man kann aber auch, indem man genau in dem Rahmen der eben angestellten Untersuchung bleibt, auf die Kovarianz von $\mathsf{W}_a(\Phi)$ zurückgreifen. Aus (21.) erhält man nämlich, wenn man den zweiten Faktor in die rationale Form setzt,

$$\text{(31.)}\quad \mathsf{W}_a(\Phi) = \frac{1}{T} K_{am} \left[\left(a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right) du_2 - \left(a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} - a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right) du_1\right],$$

und weiter durch Vergleichung mit

$$\mathsf{W}_a(\Phi) = \sum_i \frac{\varphi_{i12} - \varphi_{i21}}{T}\, du_i = \sum_{i,\nu} \frac{\{i\nu 21\}}{T} \frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu}\, du_i$$

eine Reihe von Formeln für K_{am}, z. B.

$$(32.)\qquad K_{am} = \frac{1}{a_{22}}\{2121\} \equiv K_a,$$

wo K_a von c unabhängig, also eine Punktinvariante ist. Der Nutzen der gleichzeitigen Betrachtung der rationalen und irrationalen Form der flächentheoretischen Grundgleichungen zeigt sich hier, ganz abgesehen von der Wichtigkeit der irrationalen Form an und für sich, auch darin, daß die Darstellungen der *Gauß*schen Invariante durch die *Christoffel*schen und die *Riemann*schen Größen, sowie ferner die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Größen dieser Art, fast ohne Rechnung hergeleitet werden können. Die mannigfachen Formen, die man dem Ausdruck des *Gauß*schen Krümmungsmaßes geben kann, sind jedoch zu oft behandelt worden, als daß es nötig wäre, sie an dieser Stelle von neuem zu erörtern.

Berlin, Oktober 1904.

Sur les polygones réguliers et les radicaux carrés superposés.

Par M. *Paul Wiernsberger* à Lyon.

1. *Polygones réguliers supplémentaires.*

La somme des angles (intérieurs) d'un polygone régulier de n côtés étant $(n-2a)\pi$, j'appelle n *l'ordre* de ce polygone et a son *espèce*. *Poinsot* a montré qu'il y a autant de polygones d'ordre n et d'espèces différentes qu'il y a d'unités dans la moitié de *l'indicateur* $\varphi(n)$ de l'entier n. Dans la suite j'aurai à considérer le rapport $\frac{a}{n}=i$ de l'espèce d'un polygone régulier à son ordre; pour abréger je me permets de lui donner le nom *d'indice* du polygone; c'est une fraction irréductible $<\frac{1}{2}$.

Je dirai que deux polygones $P_{n,a}$ et $P_{n',a'}$ sont *supplémentaires* si leurs indices $i=\frac{a}{n}$ et $i'=\frac{a'}{n'}$, satisfont à la relation

$$i+i'=\frac{1}{2}. \tag{1.}$$

Les polygones d'ordre doublement pair $n=4\mu$ peuvent seuls être supplémentaires de polygones de même ordre; leurs espèces sont alors a et $2\mu-a$ (a premier avec μ et $<\mu$). Le carré est lui-même son polygone supplémentaire. Pour une valeur donnée de $\mu>1$, il y a autant de couples de polygones supplémentaires d'ordre 4μ que de nombres impairs inférieurs à μ et premiers avec μ.

Deux polygones d'ordres différents ne peuvent être supplémentaires que si l'ordre de l'un est impair, l'ordre de l'autre étant double de celui du premier, et si l'espèce du second augmentée du double de l'espèce du premier est égale à l'ordre du premier. Les indices de ces polygones sont alors

$\frac{a}{n}$ et $\frac{n-2a}{2n}$ $\left(n \text{ impair}; a \text{ premier avec } n \text{ et } \leqq \frac{n-1}{2}\right)$. Pour un ordre donné $n \geqq 3$, il y a autant de couples de polygones supplémentaires d'ordres n et $2n$ qu'il y a de polygones d'ordre n c'est-à-dire $\frac{1}{2}\varphi(n)$.

2. *Différence des carrés des côtés de deux polygones supplémentaires de même rayon.*

Soient $C_{m,b}$ et $C_{n,a}$ les côtés de deux polygones supplémentaires, de rayon $1, (m \leqq n)$. En tenant compte de la relation (1.) qui lie leurs indices

$$C^2_{m,b} - C^2_{n,a} = 4 \sin \frac{\pi}{n}\left(\frac{n}{2} - 2a\right) = -4 \sin \frac{\pi}{n}\left(2a - \frac{n}{2}\right).$$

n étant $\geqq m$, ne peut être impair. S'il est simplement pair, $m = \frac{n}{2}$ et, a étant premier avec n, $\pm\left(\frac{n}{2} - 2a\right)$ l'est aussi. Donc pour n simplement pair

$$C^2_{m,b} - C^2_{n,a} = \begin{cases} +2\,C_{n,\frac{n}{2}-2a} & \text{si } \frac{a}{n} < \frac{1}{4}, \\ -2\,C_{n,2a-\frac{n}{2}} & \quad\;\; > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Si n est doublement pair, $m = n$ et on peut supposer $a < \frac{n}{4}$. Si $n = m \equiv 0$ (mod. 8), $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{4} - a$ sont premiers entre eux, donc

$$2 \sin \frac{\pi}{n}\left(2a - \frac{n}{2}\right) = C_{\frac{n}{2}, \frac{n}{4} - a}.$$

Si $n = m \equiv 4$ (mod. 8), $\frac{n}{4}$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{4} - a\right)$ sont premiers entre eux et

$$2 \sin \frac{\pi}{n}\left(2a - \frac{n}{2}\right) = C_{\frac{n}{4}, \frac{n}{8} - \frac{a}{2}}.$$

Donc $\left(\text{avec } +, \text{ si } \frac{a}{n} < \frac{1}{4} \text{ et } -, \text{ si } \frac{a}{n} > \frac{1}{4}\right)$

$$C^2_{m,b} - C^2_{n,a} = \pm \left\{ \begin{matrix} 2\,C_{\frac{n}{2}, \pm\left(\frac{n}{2} - a\right)} & \text{si } n = m \equiv 0 \\ 2\,C_{\frac{n}{4}, \pm\frac{1}{2}\left(\frac{n}{4} - a\right)} & \equiv 4 \end{matrix} \right\} \text{(mod. 8)}.$$

Ces formules se vérifient facilement par des considérations géométriques. En les combinant avec

$$C^2_{m,b} + C^2_{n,a} = 4,$$

on trouve les résultats suivants où les signes + correspondent au cas où l'indice $\frac{a}{n}$ est $> \frac{1}{4}$ et les signes — au cas où $\frac{a}{n} < \frac{1}{4}$:

$$\text{(A.)} \qquad n \equiv 1 \pmod{2}, \qquad C^2_{n,a} = 2 \pm C_{2n, \pm(4a-n)};$$

$$\text{(B.)} \qquad n \equiv 2 \pmod{4}, \qquad C^2_{n,a} = 2 \pm C_{n, \pm\left(2a-\frac{n}{2}\right)};$$

$$\text{(C.)} \qquad n \equiv 4 \pmod{8}, \qquad C^2_{n,a} = 2 \pm C_{\frac{n}{4}, \pm\frac{1}{2}\left(a-\frac{n}{4}\right)};$$

$$\text{(D.)} \qquad n \equiv 0 \pmod{8}, \qquad C^2_{n,a} = 2 \pm C_{\frac{n}{2}, \pm\left(a-\frac{n}{4}\right)}.$$

Ces quatre formules permettent de ramener le calcul du côté d'un polygone régulier d'espèce quelconque au cas où l'ordre n est simplement pair, sauf si n est une puissance de 2 et, dans ce dernier cas, on est ramené au côté du carré.

3. *Expressions, au moyen de radicaux superposés, des côtés des polygones réguliers, de rayon* 1, *dont l'ordre est une puissance de* 2.

La formule (D.) permet de calculer le côté d'un polygone régulier, de rayon 1, et d'ordre 2^h, en fonction du côté d'un polygone de même rayon, d'ordre 2^{h-1}; celui-ci en fonction du côté d'un polygone d'ordre 2^{h-2} et ainsi de suite. On obtient alors une suite de radicaux carrés superposés; par exemple:

$$C_{256,27} = 2 \sin \frac{27\pi}{256} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}}} = R(-+-+--).$$

Réciproquement toute expression de cette forme mesure le côté d'un polygone régulier, de rayon 1, dont l'ordre est une puissance de 2 et dont l'espèce se détermine facilement d'après la nature et l'ordre des signes.

4. *Convergence des expressions R.*

Supposons qu'une expression R renferme pq signes se reproduisant périodiquement de q en q. Le polygone qui lui correspond est d'ordre 2^{pq+2} et son indice α_p satisfait à la relation

$$\alpha_p - \alpha_{p-1} = \frac{1}{2^{pq+2}} \cdot (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_q)^{p-1} \cdot [\varepsilon_1 2^{q-1} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 2^{q-2} + \cdots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_q],$$

ε_μ désignant le nombre $+1$ ou -1 suivant que le μ^e signe de la période est + ou —. Il suit de là que, pour $p = \infty$, α_p tend vers une limite qu'il atteint par valeurs croissantes ou décroissantes, si le nombre des signes

— de la période est pair, ou par valeurs oscillantes, si le nombre en est impair. Cette limite, dont α_p est d'ailleurs une valeur approchée à $\frac{1}{2^{pq+2}}$ près, est une fraction $<\frac{1}{2}$ et égale à

$$\frac{2^{q-1}+\varepsilon_1 2^{q-2}+\varepsilon_1\varepsilon_2 2^{q-3}+\cdots+\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{q-1}}{2(2^q-\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_q)}.$$

La fraction irréductible i, qui lui est égale, a pour dénominateur un nombre simplement pair et le côté x du polygone régulier, de rayon 1 et d'indice i satisfait à la relation

$$x=\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\cdots+\varepsilon_{q-1}\sqrt{2+\varepsilon_q x}}}}.$$

Il en résulte que toute expression de la forme proposée, indéfiniment prolongée est convergente et représente le côté d'un polygone régulier de rayon 1 et d'ordre simplement pair.

5. *Expressions, au moyen de radicaux superposés, des côtés des polygones réguliers, de rayon* 1, *dont l'ordre est simplement pair.*

La formule (B.) fournit, pour une valeur simplement paire de n, autant d'égalités qu'il y a d'espèces différentes de polygones d'ordre n. En partant d'un côté $C_{n,a}$ on retombe sur le même au bout de $\frac{1}{2}\varphi(n)$ égalités au plus. Si au lieu d'arrêter le calcul lorsque le *cycle* se ferme, on le continue indéfiniment, on trouve des expressions périodiques comme celles dont on a montré la convergence dans le n°. précédent et qui mesurent, par conséquent, les côtés $C_{n,a}$ des polygones d'où on est parti. Par exemple:

$$C_{14,3}=\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\cdots}}}}=P(--+),\qquad C_{34,5}=P(---+).$$

Les polygones de 14 côtés forment un seul *cycle*; ceux de 34 côtés en forment deux.

Si l'ordre n est donné, le nombre des signes de la période est $\frac{1}{2}\varphi(n)$ ou l'un de ses diviseurs.

Si la période des q signes est donnée, l'ordre n est égal à $2(2^q\pm 1)$, si ce nombre n'a aucun diviseur commun avec

$$2k-1=2^{q-1}+\varepsilon_1 2^{q-2}+\varepsilon_1\varepsilon_2 2^{q-3}+\cdots+\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{q-1};$$

sinon c'est $\frac{2(2^q\pm 1)}{\mu}$, μ étant le plus grand diviseur commun à $2k-1$ et à $2(2^q\pm 1)$.

q s'obtient en cherchant le plus petit multiple de $\frac{n}{2}$ qui soit de la forme $2^q \pm 1$; suivant que ce multiple est $2^q - 1$ ou $2^q + 1$, il y a un nombre pair ou impair de signes — dans chaque période. Le nombre des cycles est $\gamma = \dfrac{\frac{1}{2}\varphi(n)}{q}$.

6. *Expressions, au moyen de radicaux superposés, des côtés des polygones réguliers, de rayon* 1, *dont l'ordre est impair ou doublement pair.*

Par l'application, aux formules (A.) et (C.), de raisonnements analogues aux précédents, on parvient aux résultats suivants: Le côté de tout polygone régulier, de rayon 1, dont l'ordre est impair, a pour expression une suite indéfinie de radicaux carrés superposés portant sur le nombre 2 et séparés par les signes + ou − groupés périodiquement, à partir du 2e. Si l'ordre est $\equiv 0$ (mod. 4), sans être une puissance de 2, on obtient une expression analogue où l'avant-période, au lieu de comporter un seul signe, en a autant qu'il y a d'unités dans l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui divise n. Réciproquement une semblable suite est convergente et mesure le côté d'un polygone régulier, de rayon 1, dont l'ordre est impair ou $\equiv 0$ (mod. 4), suivant que l'avant-période a un ou plusieurs signes, et dont l'espèce se détermine facilement d'après la nature et l'ordre des signes.

7. *Applications à la recherche de quelques limites.*

D'après ce qui précède il est facile d'écrire les formules

$$(2.)\qquad \begin{cases} C_{2^h,1} = R(-++\cdots+), \\ C_{2^h,3} = R(-++\cdots+-), \\ C_{2^h,5} = R(-++\cdots+--), \\ C_{2^h,7} = R(-++\cdots+-+), \text{ etc.}\ldots \end{cases}$$

$$(h \text{ pair})\quad C_{2^h,\frac{1}{3}(2^{h-1}+1)} = R(--\cdots-);$$

$$(3.)\qquad \begin{cases} C_{2^h,2^{h-1}-1} = R(++\cdots+), \\ C_{2^h,2^{h-1}-3} = R(++\cdots+-), \\ C_{2^h,2^{h-1}-5} = R(++\cdots+--), \\ C_{2^h,2^{h-1}-7} = R(++\cdots+-+), \text{ etc.}\ldots \end{cases}$$

$$(h \text{ impair})\quad C_{2^h,\frac{1}{3}(2^{h-1}-1)} = R(--\cdots-).$$

De (2.) et (3.) on déduit:

$$\lim \{R(++\cdots\cdots+)\} = 2, \qquad \lim \{R(--\cdots\cdots-)\} = 1.$$

Ces formules montrent aussi que si on considère comme valeurs successives d'une même expression celles qui, pour des valeurs croissantes de h, occupent le même rang, la limite de cette expression est zéro, si on compte le rang à partir du haut, et $\sqrt{2}$, si on compte à partir du bas, dans le tableau (2.); la limite est 2, si on compte à partir du haut, et $\sqrt{2}$, si on compte à partir du bas, dans le tableau (3.). Par exemple:

$$\text{La limite des expressions} \left\{ \begin{array}{llll} R(-++-), & R(-+++-), & R(-++++-), \cdots & \text{est zéro;} \\ R(-++-), & R(---+-), & R(--+-+-), & \\ & & R(--++-+-), \cdots & \text{est } \sqrt{2}; \\ R(+--), & R(+-+-), & R(+-++-), & \\ & & R(+-+++-), \cdots & \text{est } \sqrt{2}; \\ R(+--), & R(++--), & R(+++--), & \\ & & R(++++--), \cdots & \text{est } 2. \end{array} \right.$$

Les formules (2.) et (3.) conduisent aussi à l'égalité suivante:

$$\lim_{h=\infty} \left\{ 2^{h-1} R_{\frac{a+1}{2}} \right\} = \pi \cdot a,$$

où $R_{\frac{a+1}{2}}$ désigne l'expression qui dans les tableaux (2.) et (3.), lus successivement, le 1er de haut en bas, le 2e de bas en haut, occupe le rang $\frac{a+1}{2}$, quel que soit h. On peut encore écrire cette formule:

$$\lim_{h=\infty} \left\{ \frac{2^{h-1} \cdot R(\operatorname{sgn}\varepsilon_1 \operatorname{sgn}\varepsilon_2 \cdots\cdot \operatorname{sgn}\varepsilon_{h-2})}{2^{h-2} + \varepsilon_1 2^{h-3} + \varepsilon_1\varepsilon_2 2^{h-4} + \cdots + \varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{h-2}} \right\} = \pi,$$

les ε étant choisis de manière que le dénominateur conserve une valeur constante.

De la formule $C_{2^\alpha, a} \cdot C_{2^\alpha, 2^{\alpha-1}-a} = C_{2^{\alpha-1}, a}$, où $a < 2^{\alpha-2}$, on déduit, pour $4a \leqq 2^{k+1} < 2^h$,

$$C_{2^h, a} \cdot C_{2^{k+1}, 2^k - a} \cdot C_{2^{k+2}, 2^{k+1}-a} \cdots C_{2^h, 2^{h-1}-a} = C_{2^k, a}$$

et en faisant croître h indéfiniment, k conservant une valeur fixe,

$$\pi = \frac{2^{k-1}}{a} \cdot C_{2^k, a} \cdot \lim_{h=\infty} \left\{ \frac{2}{C_{2^{k+1}, 2^k - a}} \cdot \frac{2}{C_{2^{k+2}, 2^{k+1}-a}} \cdots \frac{2}{C_{2^h, 2^{h-1}-a}} \right\}.$$

Si dans cette formule on remplace les $C_{2^a,b}$ par des expressions R, on obtient, pour chaque valeur de a, des formules équivalentes quel que soit k. Pour $a=1$ on a une formule connue, due à *Catalan*. Les autres valeurs de a, en donnent des généralisations intéressantes, par exemple pour $a=3$:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{3} \cdot \lim \left\{ \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}} \cdots \right\}.$$

8. *Relations métriques entre les côtés des polygones qui appartiennent à un même cycle.*

Les différentes espèces des polygones réguliers d'un ordre donné n, simplement pair se rangent en un ou plusieurs *cycles*. Soient $a_1, \cdots a_h$ les espèces appartenant à un même cycle et $C_1, \cdots C_h$ les longueurs des côtés correspondants, en supposant le rayon $=1$. On a

$$C_1 \cdot C_2 \cdots C_h = 1.$$

Si le cycle comprend un nombre pair $h = 2g$ d'espèces, on a de plus

$$(\varepsilon_1 C_2 + \varepsilon_{g+1} C_{g+2})(\varepsilon_2 C_3 + \varepsilon_{g+2} C_{g+3}) \cdots (\varepsilon_g C_{g+1} + \varepsilon_{2g} C_1) = -1,$$

où ε_k est égal à $+1$ ou à -1 suivant que a_k est $>$ ou $<$ à $\frac{n}{4}$.

Enfin en posant $n = 2p$, en désignant par $C_{u,v}$ le côté du polygone d'ordre u et d'espèce v et par (u, v) le plus grand diviseur commun à u et à v:

$$\varepsilon_k \cdot C_{2p, a_{k+1}} + \varepsilon_{k+g} \cdot C_{2p, a_{k+g+1}} = \varepsilon_k C_{\frac{2p}{(p,\omega)}, \frac{\omega}{(p,\omega)}} \cdot C_{\frac{2p}{(p,\eta)}, \frac{\eta}{(p,\eta)}},$$

avec $\omega = a_k + a_{k+g} - p$ et $\eta = \varepsilon_k p - a_k + a_{k+g}$.

9. *Les Cycles et la théorie des indices de Gauss.*

Les *cycles* dont nous venons de parler font penser aux *périodes* imaginées par *Gauss*, dans ses *Disquisitiones arithmeticae*, pour la résolution de l'équation binôme. Mais l'existence des cycles dans le cas seulement, où il s'agit de partager la circonférence en un nombre simplement pair $2p$ de parties égales et, au contraire, l'entière généralité des méthodes de *Gauss*, ne permettent pas de pousser la comparaison bien loin. Il est cependant possible d'apercevoir certaines analogies dans le cas où p est premier.

Soient a_μ l'une des espèces appartenant à un cycle Γ relatif à l'ordre $2p$ (p premier), i_0 le nombre $< p-1$ et $\equiv$ ind. a_μ (mod. $p-1$), enfin γ le plus

$$\sin\frac{\pi}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\cdots+\varepsilon_h\sqrt{2+\cdots}}},$$

$$\cos\frac{\pi}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{2-\varepsilon_1\sqrt{2+\cdots+\varepsilon_h\sqrt{2+\cdots}}},$$

$$\sin\pi x = \frac{1}{2}\sqrt{2-\varepsilon_2\sqrt{2+\cdots+\varepsilon_h\sqrt{2+\cdots}}},$$

$$\cos\pi x = -\frac{1}{2}\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\cdots+\varepsilon_h\sqrt{2+\cdots}}}.$$

Ces développements sont uniques pour toutes les valeurs de x qui ne sont pas des fractions irréductibles ayant pour dénominateur une puissance de 2.

Band 130. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg a. d. L., Universitätstraße 54.



Journal
für die
reine und angewandte Mathematik
gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

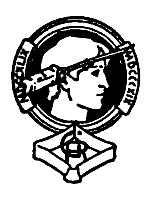
K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 130.

Heft III.

Ausgegeben den 10. November.



Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1905.

Jährlich sirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Band 130. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg a. d. L., Universitätstraße 54.

Die *Abel*schen Funktionen von drei Variabeln.

Von Herrn *Hermann Stahl* in Tübingen.

Die Theorie der *Abel*schen Funktionen von drei Variabeln hat verschiedene Bearbeitungen erfahren. Eine erste, begonnen von *Riemann*,*) fortgeführt von Herrn *Weber*,**) geht aus von der allgemeinen Kurve vierten Grades vom Geschlecht 3 (oder von einer Anzahl sie bestimmender Doppeltangenten) und gelangt auf dem von *Riemann* angegebenen Wege zur Lösung des Umkehrproblems durch die Thetafunktionen. Eine zweite von Herrn *Schottky****) nimmt den umgekehrten Weg; sie geht aus von den Thetarelationen und gelangt von ihnen zu den algebraischen Differentialgleichungen des Umkehrproblems.†) Es ist von Interesse, daß die *Schottky*sche Untersuchung nicht auf eine Kurve 4. Grades, sondern auf eine Kurve 6. Grades mit 7 Doppelpunkten führt, und es zeigt sich, daß in der Tat die letztere vor der ersteren als Grundkurve vom Geschlecht 3 manchen Vorzug hat; sie führt in durchaus rationaler Weise einfacher und leichter zu den algebraischen Bildungen, die zur Lösung des Umkehrproblems nötig sind. Auch

*) *Riemann*, Ges. W., 1. A., Leipzig 1876, S. 456 ff. und Nachträge, herausgegeben von *M. Noether* und *W. Wirtinger*, Leipzig 1902, S. 13 und S. 30.

**) *H. Weber*, Theorie der *Abel*schen Funktionen vom Geschlecht 3. Berlin 1876. (Zitiert A. F.).

***) *Schottky*, Abriß einer Theorie der *Abel*schen Funktionen von drei Variabeln. Leipzig 1880 (Zitiert A. F.). Acta math. Bd. 27, 1903, S. 235—288 (Zitiert A. M.). Monatsberichte der Berliner Akademie 1903. S. 978—986 und S. 1022—1033. 1904. S. 486—488 (Zitiert B. M.).

†) Eine dritte Bearbeitung von Herrn *Wirtinger* (Untersuchungen über *Abel*sche Funktionen vom Geschlecht 3, Math. Ann. Bd. 40, S. 261—312, 1891) steckt sich andere Ziele als die beiden ersten Behandlungen.

für höheres Geschlecht geben die Thetarelationen den besten Anhalt für die Gewinnung der geeignetsten algebraischen Grundkurven.

Die Untersuchungen *Schottkys* über die *Abel*schen Funktionen vom Geschlecht 3 sind mit großem Scharfsinn durchgeführt, aber nicht ganz leicht zu lesen. In dem Wunsche, ihr Verständnis zu erleichtern, gebe ich im folgenden von der Theorie *Schottkys* eine neue Darstellung, indem ich die von ihm gewonnenen algebraischen Resultate zum Ausgangspunkt nehme und auf dem *Riemann*schen Wege*) die Lösung des Umkehrproblems erreiche. Zur Vergleichung sind *Schottkys* Bezeichnungen im wesentlichen beibehalten und Zitate auf seine Arbeiten gegeben. Im einzelnen ist der Gang folgender:

Der erste, algebraische Teil geht aus von 7 ungeraden Perioden-Charakteristiken (kurz P. Ch.), die ein Fundamentalsystem (kurz F. S.) von P. Ch. bilden, aus denen sich also auf kanonische Weise die 21 weiteren ungeraden und die 36 geraden P. Ch. des Falles $p=3$ ergeben. Den 7 P. Ch. des F. S. werden 7 beliebige Punkte der Ebene zugeordnet. Diese führen in synthetischem Aufbau zu einer Reihe von geometrischen Gebilden, nämlich zu 21 geraden Linien $F=0$ durch je zwei und zu 21 Kegelschnitten $G=0$ durch je fünf der sieben Punkte. Ferner zu einem System von 28 Kurven dritten Grades $H=0$, von denen jede durch die 7 Grundpunkte hindurchgeht und zwei Doppelpunkte hat; endlich zu einer Kurve $L=0$ vom 6. Grade, die in jedem der 7 Grundpunkte einen Doppelpunkt hat und außerdem durch die Doppelpunkte der 28 H hindurchgeht. Betrachtet man nun die Gleichung $L=0\,(n=6;\ r=7;\ p=3)$ als die algebraische Grundgleichung für die Theorie der *Abel*schen Funktionen vom Geschlecht 3, so hat man in den $\sqrt{H}$ 28 Wurzelfunktionen erster Ordnung, von denen die 7 ersten dem F. S. der 7 ungeraden P. Ch. zugeordnet sind und ein besonderes, gleichmäßiges Verhalten gegenüber den 7 Doppelpunkten von $L=0$ zeigen, während die 21 übrigen $\sqrt{H}$ sich den übrigen ungeraden P. Ch. zuordnen und unter sich gleichmäßig gebildet sind. Es werden dann mit Hilfe der 7 Doppelpunkte und eines weiteren Punktes ξ (bei *Schottky* x') von $L=0$ 36 Funktionen X gebildet und aus ihnen und den $\sqrt{H}$ weitere Wurzelfunktionen höherer Ordnung, die sich mittels der kanonischen Darstellung aller P. Ch. durch das gewählte F. S. den 36 geraden P. Ch. zuordnen.

*) Vergl. hierzu meine „Theorie der *Abel*schen Funktionen", Leipzig 1896 (Zitiert *St.* A. F.) und „Bemerkungen zur Theorie der *Abel*schen Funktionen", (Note 1—6) Archiv d. Math. u. Physik III. Reihe Bd. VI ff. 1902 ff. (Zitiert *St.* Noten).

Der zweite, transzendente Teil enthält die Lösung des Umkehrproblems. Indem man die früher benutzten P. Ch. zu der Theta-Charakteristik (kurz T. Ch.) [0] addiert, erhält man die Zuordnung der 28 Wurzelfunktionen erster Ordnung $\sqrt{H}$ zu den ungeraden Thetafunktionen und der 36 Wurzelfunktionen höherer Ordnung zu den geraden Thetafunktionen. Dies führt zur Darstellung von Thetaquotienten, deren Argumente einfache Integrale erster Gattung $((u^{x\xi}))$ sind, durch algebraische Funktionen von x und ξ. Aus ihr ergibt sich in bekannter Weise nach *Riemann* oder Herrn *Weber* die Darstellung von Thetaquotienten, deren Argumente viergliedrige Integralsummen sind, durch algebraische und symmetrische Funktionen der oberen Grenzen dieser Integralsummen und damit die Lösung des Umkehrproblems. Den Schluß bilden die zur vollständigen Lösung nötigen Konstantenbestimmungen, wobei die einfachsten Thetarelationen des Falles $p = 3$ hinzugezogen werden.

I. Teil. *Algebraische Untersuchungen.*

§ 1. Die sieben Grundpunkte. Drei- und sechsgliedrige Determinanten.*)

Wir gehen aus (vgl. *St.* A. F. § 39 oder Note 6) von einem F. S. von sieben ungeraden P. Ch. mit der Summe (0), die wir bezeichnen mit

$$(1.) \qquad (\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta), (\varkappa), (\lambda), (\mu),$$

wobei

$$(1^a.) \qquad (\alpha\beta\gamma\delta\varkappa\lambda\mu) \equiv 0.$$

Es ist

$$(2.) \qquad (\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha_3 \\ \alpha'_1 \, \alpha'_2 \, \alpha'_3 \end{pmatrix},$$

wo die sechs Zahlen α_i, α'_i mod 2 zu nehmen sind. Es ist ferner

$$(3.) \qquad |\alpha| = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \alpha'_i \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2),$$

und das Entsprechende gilt von allen sieben P. Ch., womit gesagt ist, daß die sieben P. Ch. ungerade sind. Es ist endlich für je zwei der sieben P. Ch. der Ausdruck

*) *Schottky*, A. F. S. 19, 24, 29, 36, 51.

(4.) $$|\alpha, \beta| = \sum_i (\alpha_i \beta'_i \pm \beta_i \alpha'_i) \equiv 1 \pmod 2,$$

womit gesagt ist, daß die 7 P. Ch. ein F. S. bilden mit der Summe (0) (mod 2).

Durch die 7 P. Ch. des F. S. stellen sich *alle 64 P. Ch. dar in kanonischer Form*, nämlich die 28 *ungeraden* P. Ch. durch die ein- und zweigliedrigen Kombinationen

(5.) $$(\alpha), (\beta), \dots (\mu); \; (\alpha\beta), (\alpha\gamma), \dots (\lambda\mu)$$

und die 36 *geraden* P. Ch. durch die (0) und durch die dreigliedrigen Kombinationen

(6.) $$(\alpha\beta\gamma), (\alpha\beta\delta), \dots (\varkappa\lambda\mu).$$

Setzt man

(7.) $$\alpha|\beta = \sum_i \alpha_i \beta'_i \quad \text{und} \quad \beta|\alpha = \sum_i \beta_i \alpha'_i,$$

so ist $\alpha|\beta + \beta|\alpha \equiv 1$ und folglich

(8.) $$(-1)^{\alpha|\beta} = -(-1)^{\beta|\alpha} \qquad (-1)^{\alpha|\alpha} = -1$$

d. h. $(-1)^{\alpha|\beta}$ ändert bei der Vertauschung von α und β sein Zeichen oder ist ein *alternierender Faktor* für die Indizes α und β. Um Faktoren zu bilden, die für mehrere Indizes gleichzeitig alternierend sind, sei

(9.) $$\alpha|\beta\gamma = \alpha|\beta + \alpha|\gamma \quad \text{und} \quad \alpha\beta|\gamma = \alpha|\gamma + \beta|\gamma.$$

Dann ist z. B.

(10.) $$(-1)^{\alpha|\beta\gamma\delta + \beta|\gamma\delta + \gamma|\delta} = (-1)^{\{\alpha\beta\gamma\delta\}}$$

ein für die 4 Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alternierender Faktor.

Wir ordnen nun den 7 P. Ch. $(\alpha), (\beta), \dots (\mu)$ in einer Ebene beliebig 7 Grundpunkte $\alpha, \beta, \dots \mu$ zu mit den homogenen Koordinaten

(11.) $$(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha), \; (a_\beta, b_\beta, c_\beta), \dots (a_\mu, b_\mu, c_\mu)$$

und mit der Bedingung, daß nicht drei dieser Punkte auf einer Geraden und nicht sechs auf einem Kegelschnitt liegen.

Die 21 Größen (11.) können auf $3p - 3 = 6$ reduziert werden. Denn von je drei Größen $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$ kann stets eine willkürlich gewählt werden. Von den übrigen 14 Größen können noch 8 willkürlich angenommen werden, da nichts Wesentliches geändert wird, wenn man die homogenen Punktkoordinaten (x, y, z) der Ebene einer homogenen linearen Transformation

Determinante von der Form (14.) und die Vergleichung zweier entsprechenden Glieder gibt den alternierenden Faktor in (15.).

Es gilt ferner die Formel, wie man entweder direkt oder einfacher aus der späteren Gleichung (12.) § 2 beweist,

$$(16.)\qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma} [(-1)^{\beta\gamma|\alpha} g_\alpha f_{\alpha\kappa\lambda} f_{\alpha\mu\delta}] = 0.$$

Setzt man

$$(17.)\qquad \varepsilon_\kappa = (-1)^{\lambda\mu|\kappa}, \qquad \varepsilon_\lambda = (-1)^{\mu\kappa|\lambda}, \qquad \varepsilon_\mu = (-1)^{\kappa\lambda|\mu},$$

$$(18.)\qquad m_\kappa = g_\kappa f_{\kappa\alpha\beta} f_{\kappa\gamma\delta}, \quad m_\lambda = g_\lambda f_{\lambda\alpha\beta} f_{\lambda\gamma\delta}, \quad m_\mu = g_\mu f_{\mu\alpha\beta} f_{\mu\gamma\delta},$$

so läßt sich (16.) schreiben

$$(19.)\qquad \varepsilon_\kappa m_\kappa + \varepsilon_\lambda m_\lambda + \varepsilon_\mu m_\mu = 0.$$

§ 2. Die Funktionen 1. und 2. Grades F und G.*)

Wir betrachten ferner gewisse durch die 7 Grundpunkte definierte homogene Ausdrücke in (x, y, z), die, gleich Null gesetzt, Kurven darstellen. Um die zwischen diesen Kurven bestehenden Beziehungen zu verfolgen, benutzen wir einen bekannten Hilfssatz. Eine homogene Funktion n-ten Grades in (x, y, z) enthält, wenn sie keiner Bedingung unterworfen ist, $m = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ lineare homogene Koeffizienten; wenn sie l Bedingungen unterworfen ist, also noch $m - l$ solcher Koeffizienten. Daher:

Hilfssatz. Hat man eine Anzahl homogener Funktionen n-ten Grades in (x, y, z), die denselben l Bedingungen unterworfen sind, so besteht zwischen je $m - l + 1$ solchen Funktionen eine lineare homogene Gleichung.

Die Bedingung, daß eine Kurve durch einen gegebenen Punkt hindurchgeht, zählt für eine, daß sie in einem gegebenen Punkt einen Doppelpunkt hat, für drei Bedingungen zwischen den Koeffizienten usw.

Durch die 7 Grundpunkte $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ sind nun zuerst *21 Kurven ersten Grades* definiert, nämlich durch je zwei Punkte eine gerade Linie. Setzt man

$$(1.)\qquad F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(x, y, z) = (-1)^{\alpha|\beta} \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \end{vmatrix},$$

*) *Schottky*, A. F. S. 47—52.

so ist $F_{\alpha\beta}=0$ die *Gerade durch die zwei Punkte* α, β. Der Ausdruck (1.) ist symmetrisch in α und β, ferner $=0^1$ in den Punkten α und β; für den Punkt γ ist

$$(2.)\qquad F_{\alpha\beta}(a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma) = (-1)^{\alpha\beta|\gamma} f_{\alpha\beta\gamma}.$$

Zwischen den 21 Funktionen (1.) bestehen *Identitäten 1. und 2. Grades.*

Zunächst sind $F_{\alpha\varkappa}, F_{\beta\varkappa}, F_{\gamma\varkappa}$ drei Funktionen ersten Grades in (x, y, z), die in demselben Punkte $\varkappa$ verschwinden. Zwischen ihnen besteht also nach dem obigen Hilfssatze eine lineare homogene Gleichung ($n=1$, $m=3$, $l=1$, also $m-l+1=3$). Ferner sind $F_{\alpha\beta}F_{\gamma\varkappa}, F_{\alpha\gamma}F_{\beta\varkappa}, F_{\beta\gamma}F_{\alpha\varkappa}$ drei Funktionen zweiten Grades in (x, y, z), die in denselben 4 Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \varkappa$ verschwinden. Daher besteht auch zwischen ihnen eine lineare homogene Gleichung ($n=2$, $m=6$, $l=4$, $m-l+1=3$). Wir schreiben solche Relationen mit unbestimmten Koeffizienten an und bestimmen die Koeffizienten, indem wir (x, y, z) durch die Koordinaten von geeigneten Grundpunkten ersetzen. Man erhält so

$$(3.)\qquad \sum_{\alpha, \beta, \gamma} [(-1)^{\beta\gamma|\alpha} f_{\beta\gamma\lambda} F_{\alpha\lambda}] = 0,$$

wobei sich die Koeffizienten unmittelbar durch Einsetzen der Punkte α, β, γ ergeben. Aus (3.) folgt wieder (13.) § 1, indem man $(x, y, z) = (a_\varkappa, b_\varkappa, c_\varkappa)$ setzt. Man erhält ferner

$$(4.)\qquad \sum_{\alpha, \beta, \gamma} [(-1)^{\beta\gamma|\alpha\varkappa} F_{\beta\gamma} F_{\alpha\varkappa}] = 0,$$

wobei sich die unbestimmten Koeffizienten durch Einsetzen von λ und Vergleichen mit (13.) § 1 bestimmen. Ähnlich ergibt sich die Formel

$$(5.)\qquad \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} [(-1)^{\beta\gamma\delta|\alpha} g_\alpha f_{\alpha\varkappa\lambda} F_{\alpha\mu}] = 0,$$

wobei sich die Koeffizienten durch Eintragen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und Vergleichen mit (16.) § 1, und die Formel

$$(6.)\qquad (-1)^{\mu|\varkappa} g_\delta F_{\varkappa\lambda} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} [(-1)^{\beta\gamma|\alpha} f_{\alpha\mu\lambda} f_{\beta\gamma\mu} f_{\beta\varkappa\lambda} f_{\gamma\varkappa\lambda} F_{\alpha\varkappa}],$$

wobei sich die Koeffizienten durch Einsetzen von α, β, γ und Vergleichen mit (15.) § 1 ergeben.

Durch die 7 Grundpunkte sind ferner *21 Kurven 2. Grades* definiert, nämlich durch je 5 Punkte ein Kegelschnitt. Setzt man

$$(7.)\qquad g_\lambda g_\mu G_{\lambda\mu} = (-1)^{\{\alpha\beta\gamma\delta\varkappa\}} \underset{(a=\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa)}{\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & yz & zx & xy \\ a_a^2 & b_a^2 & c_a^2 & b_a c_a & c_a a_a & a_a b_a \end{vmatrix}},$$

so ist $G_{\lambda\mu}=0$ ein Kegelschnitt durch die fünf Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa$. Der Ausdruck (7.) ist symmetrisch für die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa$ einerseits und λ, μ andererseits; ferner ist

$$(8.)\qquad G_{\lambda\mu}(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda)=\frac{(-1)^{\lambda|\lambda\mu}}{g_\lambda}, \qquad G_{\lambda\mu}(a_\mu, b_\mu, c_\mu)=\frac{(-1)^{\mu|\mu\lambda}}{g_\mu}.$$

Man kann nun $G_{\lambda\mu}$ *auch darstellen durch die Funktionen F.* Da nämlich $G_{\lambda\mu}$, $F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$, $F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta}$ gleichzeitig in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verschwinden, so besteht zwischen diesen drei Funktionen eine lineare homogene Gleichung. Die Koeffizienten bestimmen sich dadurch, daß $G_{\lambda\mu}$ auch in $\varkappa$ verschwindet und in den Punkten λ und μ die Werte (8.) annimmt. Man erhält so für $G_{\lambda\mu}$ die Darstellung

$$(9.)\qquad g_\lambda g_\mu G_{\lambda\mu}=(-1)^{\alpha|\delta+\gamma|\beta}\begin{vmatrix} f_{\varkappa\alpha\beta}f_{\varkappa\gamma\delta} & F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} \\ f_{\varkappa\alpha\gamma}f_{\varkappa\beta\delta} & F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta}\end{vmatrix}.$$

Zwischen den Funktionen F und G bestehen noch *weitere Identitäten.* Da die 6 Ausdrücke zweiten Grades in (x, y, z)

$$G_{\varkappa\lambda},\ G_{\lambda\mu},\ G_{\mu\varkappa},\ F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta},\ F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta},\ F_{\alpha\delta}F_{\beta\gamma}$$

gleichzeitig in den 4 Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verschwinden, so besteht zwischen je dreien eine lineare homogene Gleichung. Setzt man solche Gleichungen mit unbestimmten Koeffizienten an und bestimmt diese durch Eintragen der Grundpunkte $\varkappa, \lambda, \mu$, so erhält man die Relationen

$$(10.)\qquad \sum_{\varkappa,\lambda,\mu}[(-1)^{\lambda\mu|\varkappa}G_{\lambda\mu}]=0,$$

$$(11.)\qquad F_{\alpha\delta}F_{\beta\gamma}=(-1)^{\lambda|\mu}[g_\lambda f_{\alpha\delta\lambda}f_{\beta\gamma\lambda}G_{\varkappa\lambda}-g_\mu f_{\alpha\delta\mu}f_{\beta\gamma\mu}G_{\varkappa\mu}].$$

Da ferner die drei Ausdrücke dritten Grades in (x, y, z) $F_{\alpha\varkappa}G_{\alpha\lambda}, F_{\beta\varkappa}G_{\beta\lambda}, F_{\gamma\varkappa}G_{\gamma\lambda}$ gleichzeitig $=0^1$ sind in den fünf Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ und $=0^2$ in $\varkappa$, so hat man hier $n=3$; $m=10$; $l=5+3$, $m-l+1=3$, d. h. es besteht zwischen den drei Funktionen eine lineare homogene Gleichung. Man findet mit Hilfe von (9.)

$$(12.)\qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma}[(-1)^{\beta\gamma|\alpha}g_\alpha f_{\alpha\delta\mu}F_{\alpha\varkappa}G_{\alpha\lambda}]=0$$

und hieraus, indem man $(x, y, z)=(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda)$ setzt, die Formel (16.) § 1, womit diese nachträglich bewiesen ist. Setzt man

(13.) $$M_\alpha = \frac{F_{\alpha\varkappa} G_{\alpha\lambda}}{f_{\alpha\varkappa\lambda}}, \quad M_\beta = \frac{F_{\beta\varkappa} G_{\beta\lambda}}{f_{\beta\varkappa\lambda}}, \quad M_\gamma = \frac{F_{\gamma\varkappa} G_{\gamma\lambda}}{f_{\gamma\varkappa\lambda}}$$

und benutzt die Bezeichnungen (17.) und (18.) § 1, so läßt sich (12.) schreiben

(14.) $$\varepsilon_\alpha m_\alpha M_\alpha + \varepsilon_\beta m_\beta M_\beta + \varepsilon_\gamma m_\gamma M_\gamma = 0.$$

§ 3. Die Funktionen 3. Grades H und X, Y, Z.

Wir definieren *drittens* 28 *Funktionen 3. Grades H* in (x, y, z), die ebenfalls in enger Beziehung zu den 7 Grundpunkten stehen. Zunächst seien *21 Funktionen H mit doppeltem Index* bestimmt durch die Gleichungen

(1.) $$H_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}.$$

Die Funktion $H_{\alpha\beta}$ ist vom 3. Grade in (x, y, z), $=0^1$ in den 7 Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa, \lambda, \mu$, da $F_{\alpha\beta}$ in den zwei ersten, $G_{\alpha\beta}$ in den fünf letzten Punkten verschwindet, und $=0^2$ in jedem der beiden Schnittpunkte der Kurven $F_{\alpha\beta} = 0$ und $G_{\alpha\beta} = 0$. Diese Punkte seien mit $p_{\alpha\beta}$ und $q_{\alpha\beta}$ bezeichnet.

Ferner definieren wir 7 *Funktionen H mit einfachem Index* $H_\alpha, H_\beta, \ldots H_\mu$. Es sei $H_\varkappa$ vom 3. Grade in (x, y, z), gleich 0^1 in den 6 Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ und $=0^2$ in $\varkappa$, oder es sei $H_\varkappa = 0$ eine Kurve 3. Grades, die durch die 6 erstgenannten Punkte einfach hindurchgeht und in $\varkappa$ einen Doppelpunkt hat. Man erhält hiernach $H_\varkappa = 0$ in Determinantenform, indem man eine homogene Gleichung 3. Grades $H(x, y, z) = 0$ mit unbestimmten Koeffizienten anschreibt, mit ihr die 6 Gleichungen $H(a_i, b_i, c_i) = 0$ $(i = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu)$ und die drei Gleichungen $H'(x) = 0, H'(y) = 0, H'(z) = 0$, gebildet für $(x, y, z) = (a_\varkappa, b_\varkappa, c_\varkappa)$, verbindet und aus diesen 10 Gleichungen die Koeffizienten von H eliminiert. Die Determinante ist alternierend für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ und kann durch Zusatz des alternierenden Faktors $(-1)^{\{\alpha\beta\gamma\delta\lambda\mu\}}$ symmetrisch in den 6 Indizes gemacht werden.

Wir stellen $H_\varkappa$ sogleich *durch die Funktionen F* und *G* dar. Die drei Funktionen $H_\varkappa$, $F_{\alpha\varkappa} G_{\alpha\lambda}$, $F_{\beta\varkappa} G_{\beta\lambda}$ sind gleichzeitig $=0^1$ in $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ und $=0^2$ in $\varkappa$. Da hier $n = 3$, $m = 10$; $l = 8$; $m - l + 1 = 3$, so besteht zwischen den drei Funktionen eine lineare, homogene Gleichung. Berücksichtigt man, daß $H_\varkappa$ noch in λ verschwindet, so bleibt nur noch ein Faktor von $H_\varkappa$ unbestimmt; wir setzen

(2.) $$(-1)^{\alpha|\beta} g_\gamma g_\delta g_\mu f_{\gamma\delta\mu} H_\varkappa = f_{\beta\varkappa\lambda} F_{\alpha\varkappa} G_{\alpha\lambda} - f_{\alpha\varkappa\lambda} F_{\beta\varkappa} G_{\beta\lambda}.$$

*) *Schottky*, A. F. S. 52—54, 60, 61, 65, 66.

Die so definierte Funktion $H_\varkappa$ ist symmetrisch für die 6 Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta, \lambda, \mu$. Zunächst nämlich ist nach (2.) $H_\varkappa$ symmetrisch einerseits für γ, ϑ, μ, andererseits für α, β. Man sieht ferner, daß der Wert von $H_\varkappa$ auch ungeändert bleibt, wenn man α mit γ vertauscht. Denn aus den Gleichungen (19.) § 1 und (14.) § 2, nämlich

$$\varepsilon_\alpha m_\alpha + \varepsilon_\beta m_\beta + \varepsilon_\gamma m_\gamma = 0, \qquad \varepsilon_\alpha m_\alpha M_\alpha + \varepsilon_\beta m_\beta M_\beta + \varepsilon_\gamma m_\gamma M_\gamma = 0$$

folgt

$$(-1)^{\beta|\alpha}(M_\alpha - M_\beta) = (-1)^{\beta|\gamma}\frac{m_\gamma}{m_\alpha}(M_\gamma - M_\beta)$$

und daraus

$$H_\varkappa = (-1)^{\beta|\alpha}\frac{f_{\alpha\varkappa\lambda} f_{\beta\varkappa\lambda}(M_\alpha - M_\beta)}{g_\gamma g_\delta g_\mu f_{\gamma\delta\mu}} = (-1)^{\beta|\gamma}\frac{f_{\gamma\varkappa\lambda} f_{\beta\varkappa\lambda}(M_\gamma - M_\beta)}{g_\alpha g_\delta g_\mu f_{\alpha\delta\mu}}, \tag{2a.}$$

zwei Ausdrücke, die bei der Vertauschung von α und γ in einander übergehen. Es bleibt also $H_\varkappa$ ungeändert, wenn man die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta, \mu$ unter einander vertauscht. Dasselbe gilt auch noch, wenn man einen dieser Indizes mit λ vertauscht. Multipliziert man nämlich die Gleichung (2.) mit $F_{\gamma\delta}$ und berücksichtigt, daß nach (11.) § 2

$$F_{\alpha\varkappa} F_{\gamma\delta} = (-1)^{\lambda|\mu}[g_\lambda f_{\alpha\varkappa\lambda} f_{\gamma\delta\lambda} G_{\beta\lambda} - g_\mu f_{\alpha\varkappa\mu} f_{\gamma\delta\mu} G_{\beta\mu}],$$
$$F_{\beta\varkappa} F_{\gamma\delta} = (-1)^{\lambda|\mu}[g_\lambda f_{\beta\varkappa\lambda} f_{\gamma\delta\lambda} G_{\alpha\lambda} - g_\mu f_{\beta\varkappa\mu} f_{\gamma\delta\mu} G_{\alpha\mu}],$$

so erhält man aus (2.), indem sich die mit g_λ multiplizierten Glieder aufheben, die Gleichung

$$(-1)^{\beta|\alpha+\mu|\lambda} g_\lambda g_\delta F_{\gamma\delta} H_\varkappa = f_{\beta\varkappa\lambda} f_{\alpha\varkappa\mu} G_{\alpha\lambda} G_{\beta\mu} - f_{\alpha\varkappa\lambda} f_{\beta\varkappa\mu} G_{\beta\lambda} G_{\alpha\mu}, \tag{2b.}$$

eine Darstellung, die symmetrisch ist in λ und μ, womit die obige Behauptung erwiesen ist. Aus der Definition der H ergeben sich zugleich die *zwischen ihnen bestehenden Identitäten.* Da alle H für die 7 Grundpunkte verschwinden, also hier $n=3$, $m=10$, $l=7$; $m-l+1=4$ ist, so besteht zwischen je *4 der 28 Funktionen H eine lineare homogene Gleichung.* Wir suchen *zuerst* die Relation zwischen je 4 *H mit einfachem Index*, etwa $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta$. Hierzu schreiben wir die 4 Gleichungen an, die nach (2.) diese Funktionen definieren, nämlich:

$$\left\{\begin{aligned}
(-1)^{\mu|\varkappa} g_\beta g_\gamma g_\delta f_{\beta\gamma\delta} H_\alpha &= f_{\alpha\mu\lambda} F_{\alpha\varkappa} G_{\varkappa\lambda} - f_{\alpha\varkappa\lambda} F_{\alpha\mu} G_{\mu\lambda},\\
(-1)^{\mu|\varkappa} g_\gamma g_\delta g_\alpha f_{\gamma\delta\alpha} H_\beta &= f_{\beta\mu\lambda} F_{\beta\varkappa} G_{\varkappa\lambda} - f_{\beta\varkappa\lambda} F_{\beta\mu} G_{\mu\lambda},\\
(-1)^{\mu|\varkappa} g_\delta g_\alpha g_\beta f_{\delta\alpha\beta} H_\gamma &= f_{\gamma\mu\lambda} F_{\gamma\varkappa} G_{\varkappa\lambda} - f_{\gamma\varkappa\lambda} F_{\gamma\mu} G_{\mu\lambda},\\
(-1)^{\mu|\varkappa} g_\alpha g_\beta g_\gamma f_{\alpha\beta\gamma} H_\delta &= f_{\delta\mu\lambda} F_{\delta\varkappa} G_{\varkappa\lambda} - f_{\delta\varkappa\lambda} F_{\delta\mu} G_{\mu\lambda}
\end{aligned}\right. \tag{3.}$$

d. h. es *existieren drei Funktionen* 3. Grades X, Y, Z, *die mit den* H_m *durch die einfachen Gleichungen* verbunden sind

$$(8.)\qquad H_m = a_m X + b_m Y + c_m Z. \qquad (m=\alpha,\beta,\ldots\mu)$$

Aus diesen Gleichungen und der Darstellung (5.) von $H_{\varkappa\lambda}$ durch $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$ ergibt sich auch eine Darstellung von $H_{\varkappa\lambda}$ durch X, Y, Z, nämlich

$$(9.)\qquad H_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa\lambda} X + b_{\varkappa\lambda} Y + c_{\varkappa\lambda} Z,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(10.)\qquad a_{\varkappa\lambda} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} [(-1)^{\beta\gamma|\alpha} g_\beta g_\gamma f_{\beta\gamma\delta} f_{\beta\gamma\mu} f_{\beta\varkappa\lambda} f_{\gamma\varkappa\lambda} a_\alpha].$$

Es gilt nun der *wichtige Satz, daß zwischen den Funktionen* X, Y, Z *und den Variabeln* (x, y, z) *die Identität besteht*

$$(11.)\qquad xX + yY + zZ = 0.$$

Zum Beweise löse man die Gleichungen (vgl. (1.) § 2)

$$F_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha|\beta} |x\, a_\alpha a_\beta|;\quad F_{\beta\gamma} = (-1)^{\beta|\gamma} |x\, a_\beta a_\gamma|;\quad F_{\gamma\alpha} = (-1)^{\gamma|\alpha} |x\, a_\gamma a_\alpha|$$

nach x, y, z auf; man erhält

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta\gamma}\cdot x &= (-1)^{\beta\gamma|\alpha} a_\alpha F_{\beta\gamma} + (-1)^{\gamma\alpha|\beta} a_\beta F_{\gamma\alpha} + (-1)^{\alpha\beta|\gamma} a_\gamma F_{\alpha\beta}, \\ f_{\alpha\beta\gamma}\cdot y &= (-1)^{\beta\gamma|\alpha} b_\alpha F_{\beta\gamma} + (-1)^{\gamma\alpha|\beta} b_\beta F_{\gamma\alpha} + (-1)^{\alpha\beta|\gamma} b_\gamma F_{\alpha\beta}, \\ f_{\alpha\beta\gamma}\cdot z &= (-1)^{\beta\gamma|\alpha} c_\alpha F_{\beta\gamma} + (-1)^{\gamma\alpha|\beta} c_\beta F_{\gamma\alpha} + (-1)^{\alpha\beta|\gamma} c_\gamma F_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Multipliziert man hier bez. mit X, Y, Z und berücksichtigt (8.) und (6.), so folgt

$$f_{\alpha\beta\gamma}(xX + yY + zZ) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} [(-1)^{\beta\gamma|\alpha} F_{\beta\gamma} H_\alpha] = 0,$$

womit (11.) bewiesen ist. Zugleich folgt, wenn man

$$(12.)\qquad \varDelta = (x\,dX + y\,dY + z\,dZ) = -(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

setzt,

$$(13.)\qquad f_{\alpha\beta\gamma} \varDelta = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} (-1)^{\beta\gamma|\alpha} F_{\beta\gamma}\, dH_\alpha = -\sum_{\alpha,\beta,\gamma} (-1)^{\beta\gamma|\alpha} H_\alpha\, dF_{\beta\gamma}.$$

§ 4. Die Kurve $L(x, y, z) = 0$ vom 6. Grade.*)

Indem man die *Funktionaldeterminante der drei Funktionen* X, Y, Z nach x, y, z gleich Null setzt,

$$(1.)\qquad \Sigma \pm \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

*) *Schottky*, A. F. S. 54—59. B. M. 1904 S. 979.

gelangt man zu *einer Kurve* $L=0$ *vom 6. Grade in* (x, y, z), *die wiederum zu den 7 Grundpunkten und den 28 Funktionen* H *in einfacher Beziehung steht.* Die Gleichung (1.) ist unabhängig von der Vertauschung der sieben Indizes, sie ändert sich nur um einen von (x, y, z) unabhängigen Faktor, wenn X, Y, Z ersetzt werden durch lineare Kombinationen dieser drei Funktionen mit beliebigen Koeffizienten, z. B. durch drei der 28 Funktionen H.

Die durch (1.) *dargestellte Kurve* $L=0$ *hat folgende Eigenschaften:*

a) Sie hat die 7 Grundpunkte zu Doppelpunkten.

b) Im Punkt α berühren ihre beiden Zweige die beiden Zweige von $H_\alpha=0$; das entsprechende gilt für jeden der sieben Punkte.

c) Sie geht durch die 21 Punktepaare $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$, in denen je eine Funktion $H_{\alpha\beta}$ verschwindet.

Der Beweis dieser Behauptungen folgt aus einem bekannten Satze über die Funktionaldeterminante der *Jacobi*schen Kurve von drei Funktionen, nämlich:*)

Die *Jacobi*sche Kurve $\Delta=0$ von drei Kurven $A=0$, $B=0$, $C=0$ von gleichem Grade geht nicht nur durch jeden gemeinsamen Schnittpunkt dieser drei Kurven, sondern hat in jedem solchen Punkt einen Doppelpunkt. Hat $A=0$ in einem solchen Punkt selber einen Doppelpunkt, so fallen in ihm die beiden Tangenten von $A=0$ mit denen von $\Delta=0$ zusammen.

Um diesen Satz auf unseren Fall anzuwenden, nehmen wir für die drei Kurven etwa $X=0$, $H_\alpha=0$, $H_{\alpha\beta}=0$, die von gleichem Grade sind und deren *Jacobi*sche Kurve nach der obigen Bemerkung $L=0$ ist. Da die drei Kurven sämtlich durch die 7 Grundpunkte gehen, so hat $L=0$ in jedem der Grundpunkte einen Doppelpunkt. Da ferner $H_\alpha=0$ in α selber einen Doppelpunkt hat, so fallen in α die beiden Tangenten von $H_\alpha=0$ mit denen von $L=0$ zusammen.

Die dritte Behauptung folgt daraus, daß in der aus den drei Funktionen X, H_α, $H_{\alpha\beta}$ gebildeten Funktionaldeterminante die von $H_{\alpha\beta}=F_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}$ herrührende Reihe die Glieder hat

$$F_{\alpha\beta}\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x}+G_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x}, \quad F_{\alpha\beta}\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial y}+G_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial y}, \quad F_{\alpha\beta}\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial z}+G_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial z},$$

*) Vergleiche etwa *Clebsch-Gordan*, Theorie der *Abel*schen Funktionen (1866) S. 60. Der dortige Satz bedarf einer Ergänzung in dem obigen Sinne, worauf mich mein Kollege *A. Brill* freundlichst aufmerksam gemacht hat.

die sämtlich für die Schnittpunkte $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ von $F_{\alpha\beta}=0$ und $G_{\alpha\beta}=0$ verschwinden. Das entsprechende gilt für jede der 21 Funktionen $H_{\alpha\beta}$ mit doppeltem Index.

Man kann die Kurve $L=0$ in Determinantenform darstellen, indem man eine Kurve 6. Grades in (x, y, z) mit unbestimmten Koeffizienten anschreibt und die Koeffizienten bestimmt durch die Bedingungen, daß die Kurve die 7 Grundpunkte zu Doppelpunkten hat und daß sie außerdem durch drei der 21 Punktepaare $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ hindurchgeht. Wir wenden uns sogleich zur *Darstellung von* $L=0$ *durch die früher definierten Funktionen* F, G, H.

Wir bilden eine *erste Gleichung*

$$\begin{vmatrix} F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} & G_{\alpha\beta}G_{\gamma\delta} \\ F_{\alpha\delta}F_{\beta\gamma} & G_{\alpha\delta}G_{\beta\gamma} \end{vmatrix}=0. \tag{2.}$$

Durch einfache Umformung erhält man für sie eine *zweite Form:*

$$F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}F_{\lambda\mu}H_{\varkappa}-G_{\alpha\beta}G_{\gamma\delta}G_{\lambda\mu}=0. \tag{3.}$$

Es besteht nämlich, wie die Vergleichung von (9.) § 2 und (2[b].) § 3 zeigt, zwischen den drei Funktionen $F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$, $F_{\alpha\delta}F_{\beta\gamma}$, $G_{\lambda\mu}$ dieselbe Beziehung wie zwischen $G_{\alpha\beta}G_{\gamma\delta}$, $G_{\alpha\delta}G_{\beta\gamma}$, $F_{\lambda\mu}H_{\varkappa}$, also

$$AF_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}+BF_{\alpha\delta}F_{\beta\gamma}+CG_{\lambda\mu}=0, \qquad AG_{\alpha\beta}G_{\gamma\delta}+BG_{\alpha\delta}G_{\beta\gamma}+CF_{\lambda\mu}H_{\varkappa}=0.$$

Durch Elimination des Koeffizienten A folgt

$$B(F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}G_{\alpha\delta}G_{\beta\gamma}-F_{\alpha\delta}F_{\beta\gamma}G_{\alpha\beta}G_{\gamma\delta})+C(F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}F_{\lambda\mu}H_{\varkappa}-G_{\alpha\beta}G_{\gamma\delta}G_{\lambda\mu})=0.$$

Aus dieser Identität folgt die Übereinstimmung von (2.) und (3.).

Eine *dritte Form* von (2.) ergibt sich aus der Bemerkung, daß nach (3.), da man $\varkappa$ mit μ vertauschen kann, auch $F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}F_{\lambda\varkappa}H_{\mu}-G_{\alpha\beta}G_{\gamma\delta}G_{\varkappa\lambda}=0$ ist. Aus dieser Gleichung und (3.) folgt als dritte Form

$$F_{\lambda\mu}G_{\lambda\varkappa}H_{\varkappa}-F_{\lambda\varkappa}G_{\lambda\mu}H_{\mu}=0. \tag{4.}$$

Man sieht nun leicht, daß die drei identischen Formen (2.), (3.), (4.) unabhängig sind von der Vertauschung der 7 Indizes $\alpha, \beta, \dots \mu$. Denn die Form (2.) zeigt, daß man $\varkappa$, λ, μ unter sich, die Form (4.), daß man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unter sich vertauschen kann, die Form (3.) aber, daß man λ, μ mit α, β oder γ, δ vertauschen kann. Man schließt ferner, daß die drei Formen (2.), (3.), (4.) mit $L=0$ oder (1.) identisch sind. Denn die Form (2.)

verschwindet in zweiter Ordnung für jeden der 7 Grundpunkte $\alpha, \dots \mu$ und in erster Ordnung in den Punktepaaren $(p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta})$, $(p_{\gamma\delta}, q_{\gamma\delta})$, $(p_{\alpha\delta}, q_{\alpha\delta})$ und $(p_{\beta\gamma}, q_{\beta\gamma})$, folglich auch durch Vertauschung der Indizes in allen übrigen Punktepaaren (p, q). Dies sind aber die definierenden Eigenschaften von $L=0$; die linken Seiten der Gleichungen (2.), (3.), (4.) können sich daher von $L=0$ nur um konstante Faktoren unterscheiden.

Herr *Schottky* erwähnt noch eine Darstellung von $L=0$, die daraus hervorgeht, daß es möglich ist, eine homogene Funktion 3. Grades $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ von drei unabhängigen Variabeln (ξ, η, ζ) zu bilden, die an den 7 Stellen $\alpha, \dots \mu$ in erster Ordnung und an der Stelle (x, y, z) in zweiter Ordnung verschwindet. Hiernach und nach der obigen Bemerkung über die Darstellung von $L=0$ durch eine Determinante muß man den Ausdruck für L aus dem von H_x erhalten, wenn man (x, y, z) mit (a_x, b_x, c_x) vertauscht. In der Tat macht man diese Vertauschung auf der rechten Seite der Gleichung (2^b.) § 3, so erhält man gerade die linke Seite der obigen Gleichung (2.).

Die Kurve $L=0$ vom 6. Grade in (x, y, z) besitzt 7 Doppelpunkte $\alpha, \dots \mu$; sie ist daher *vom Geschlecht* $p=3$. Wir betrachten nun *im folgenden* $L=0$ *als algebraische Grundkurve für die Theorie der Abelschen Funktionen von 3 Variabeln,* so daß in allen unseren algebraischen Bildungen die Voraussetzung gelten soll, daß (x, y, z) der Gleichung $L=0$ genügt. Die früher definierten Funktionen F, G, H sind demnach als *algebraische Funktionen einer Variabeln* und die Relationen zwischen ihnen nicht mehr als Identitäten, sondern *als Gleichungen zwischen algebraischen Funktionen von einer Variabeln* aufzufassen. Das Verhalten dieser Funktionen zu $L=0$ ist folgendes:

Die *Kurve 1. Grades* $F_{\alpha\beta}=0$ hat 6 Schnittpunkte mit $L=0$, nämlich 2 Schnittpunkte in jedem der 2 Doppelpunkte α und β und einen Schnittpunkt in jedem der einfachen Punkte $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$ von $L=0$.

Die *Kurve 2. Grades* $G_{\lambda\mu}=0$ hat 12 Schnittpunkte mit $L=0$, zwei Schnittpunkte in jedem der 5 Doppelpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa$ und einen Schnittpunkt in jedem der einfachen Punkte $p_{\lambda\mu}, q_{\lambda\mu}$ von $L=0$.

Die *Kurven 3. Grades* $H_\alpha=0$ und $H_{\varkappa\lambda}=0$ sind $L=0$ adjungiert, d. h. sie gehen sämtlich durch die 7 Doppelpunkte $\alpha, \beta, \dots \mu$ von $L=0$. Von den 18 Schnittpunkten von $H_{\varkappa\lambda}=0$ mit $L=0$ fallen 2 in die 7 Punkte $\alpha, \beta, \dots \mu$; und außerdem noch 2 in jeden der Punkte $p_{\varkappa\lambda}$ und $q_{\varkappa\lambda}$, wo $L=0$

einen einfachen, $H_{\varkappa\lambda}=0$ einen Doppelpunkt hat. Von den 18 Schnittpunkten von $H_\alpha=0$ mit $L=0$ fallen 2 in jeden der 6 Punkte $\beta, \gamma, \dots \mu$; 6 in den Punkt α, weil sich hier die beiden Zweige von $H_\alpha=0$ und $L=0$ berühren. Man kann sagen, von den 18 Schnittpunkten von $H_\alpha=0$ mit $L=0$ fallen 2 in jeden der 7 Punkte $\alpha, \beta, \dots \mu$ und außerdem noch 2 in jeden der Punkte p_α und q_α, die selber in α zusammenfallen. Die drei Kurven $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ sind ebenfalls $L=0$ adjungiert, d. h. sie gehen durch die 7 Doppelpunkte $\alpha, \beta, \dots \mu$ von $L=0$.

Wir geben den *unter der Voraussetzung* $L=0$ bestehenden Relationen (2.), (3.), (4.) zwischen den Funktionen F, G, H eine andere Form; aus (2.) und (3.) folgt

$$(5.)\qquad \frac{G_{\alpha\beta}G_{\gamma\delta}}{F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}}=\frac{G_{\alpha\delta}G_{\beta\gamma}}{F_{\alpha\delta}F_{\beta\gamma}} \qquad H_\varkappa=\frac{G_{\alpha\beta}G_{\gamma\delta}G_{\lambda\mu}}{F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}F_{\lambda\mu}}.$$

Aus (4.) folgt, da $F_{\varkappa\lambda}G_{\varkappa\lambda}=H_{\varkappa\lambda}$, daß die Funktion

$$(6.)\qquad R=\frac{H_\varkappa H_\lambda G_{\varkappa\lambda}}{F_{\varkappa\lambda}}=\frac{H_\varkappa H_\lambda H_{\varkappa\lambda}}{F_{\varkappa\lambda}^2}=\frac{H_\varkappa H_\lambda G_{\varkappa\lambda}^2}{H_{\varkappa\lambda}}$$

von der Vertauschung der Indizes $\alpha, \dots \mu$ unabhängig ist. Multipliziert man die drei Gleichungen

$$H_\alpha H_\beta G_{\alpha\beta}=RF_{\alpha\beta} \qquad H_\gamma H_\delta G_{\gamma\delta}=RF_{\gamma\delta} \qquad H_\lambda H_\mu G_{\lambda\mu}=RF_{\lambda\mu}$$

und benutzt die Gleichung (3.), so erhält man

$$(7.)\qquad H_\alpha H_\beta H_\gamma H_\delta H_\varkappa H_\lambda H_\mu=R^3.$$

Wir geben hier noch eine später zu benutzende *Umformung* der Gleichung (1.). Aus der Identität

$$(8.)\qquad xX+yY+zZ=0$$

erhält man durch Differentiation nach x, y, z drei Gleichungen, die man benutzen kann, um aus (1.) die Größen $\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial z}$ zu eliminieren; man erhält so statt (1.)

$$(9.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0.$$

Ferner hat man, da X, Y homogene Funktionen vom 3. Grade in (x, y, z) sind,

drei solcher Zerlegungen, so besteht zwischen den zugehörigen Wurzelfunktionen eine lineare, homogene Gleichung von der Form

$$(2.)\qquad A_1\sqrt{H_{a_1}H_{b_1}}+A_2\sqrt{H_{a_2}H_{b_2}}+A_3\sqrt{H_{a_3}H_{b_3}}=0.$$

Jede solche Gleichung nun ist identisch mit $M(X, Y, Z)=0$ und wird auf diese Form gebracht durch zweimaliges Quadrieren. Man erhält zunächst $\sqrt{H_{a_1}H_{b_1}H_{a_2}H_{b_2}}$ gleich einer rationalen Funktion 2. Grades in den H und durch nochmaliges Quadrieren eine Gleichung 4. Grades in den H, oder wenn man die Funktionen X, Y, Z einführt, die Gleichung (1.).

Man kann nun die Gleichung (2.) und damit (1.), auch ohne die eben erwähnten Sätze zu benutzen, mit Hilfe der früheren Darstellungen direkt bilden. Zu dem Zwecke entnehmen wir aus (6.) § 4 die Gleichungen

$$(3.)\qquad F_{\varkappa\lambda}=\frac{\sqrt{H_\varkappa H_\lambda H_{\varkappa\lambda}}}{\sqrt{R}},\qquad G_{\varkappa\lambda}=\frac{\sqrt{R}\sqrt{H_{\varkappa\lambda}}}{\sqrt{H_\varkappa H_\lambda}},$$

in denen die Vorzeichen der 7 Funktionen $\sqrt{H_\alpha}, \ldots \sqrt{H_\mu}$ willkürlich gewählt seien, wonach sich das Vorzeichen von $\sqrt{R}$ aus (7.) § 4 und das von $\sqrt{H_{\varkappa\lambda}}$ aus (3.) ergibt.

Indem man die Werte (3.) in die früher aufgestellten Gleichungen (3.), (4.), (10.), (12.) § 2 einträgt, erhält man die folgenden Relationen von der Form (2.)

$$(4.)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma}\left[(-1)^{\beta\gamma\,\alpha} f_{\beta\gamma\varkappa}\sqrt{H_\alpha H_{\alpha\varkappa}}\right]=0, \\ \sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma}\left[(-1)^{\beta\gamma|\alpha\delta}\sqrt{H_{\beta\gamma}H_{\alpha\delta}}\right]=0, \\ \sum\limits_{\varkappa,\lambda,\mu}\left[(-1)^{\lambda\mu\,\varkappa}\sqrt{H_\varkappa H_{\lambda\mu}}\right]=0, \\ \sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma}\left[(-1)^{\beta\gamma\,\alpha} g_\alpha f_{\alpha\delta\mu}\sqrt{H_{\alpha\varkappa}H_{\alpha\lambda}}\right]=0, \end{cases}$$

die sich leicht noch vermehren lassen. Aus jeder dieser Gleichungen läßt sich $M(X, Y, Z)=0$ herstellen.

Zwischen den beiden Gleichungen $L(x, y, z)=0$ und $M(X, Y, Z)=0$ besteht eine wichtige Beziehung; sie lassen sich durch *birationale Transformation* in einander überführen, d. h. die Verhältnisse der Koordinaten X, Y, Z stellen sich dar als rationale Funktionen der Verhältnisse der Koordinaten x, y, z und umgekehrt. Man erhält nämlich die Verhältnisse der X, Y, Z als rationale Funktionen der Verhältnisse der x, y, z aus je zwei Gleichungen der Form

$$H_\alpha=a_\alpha X+b_\alpha Y+c_\alpha Z,\qquad H_\beta=a_\beta X+b_\beta Y+c_\beta Z.$$

Umgekehrt ergeben sich aus (3.) die Gleichungen

$$\frac{F_{\varkappa\lambda}}{F_{\lambda\mu}} = \frac{\sqrt{H_\varkappa H_{\varkappa\lambda}}}{\sqrt{H_\mu H_{\lambda\mu}}}, \qquad \frac{F_{\varkappa\mu}}{F_{\lambda\mu}} = \frac{\sqrt{H_\varkappa H_{\varkappa\mu}}}{\sqrt{H_\lambda H_{\lambda\mu}}}.$$

Die Quotienten auf der rechten Seite sind rationale Funktionen von X, Y, Z. Denn nach der Bemerkung zu Gleichung (2.) ist $\sqrt{H_\varkappa H_\mu H_{\varkappa\lambda} H_{\lambda\mu}}$ eine rationale Funktion 2. Grades in X, Y, Z; eine ebensolche Funktion ist $H_\mu H_{\lambda\mu}$; folglich ist auch der Quotient beider rational in X, Y, Z. Da nun $F_{\varkappa\lambda}, F_{\varkappa\mu}, F_{\lambda\mu}$ lineare Funktionen von x, y, z sind, so erhält man durch Auflösung der beiden Gleichungen die Verhältnisse der x, y, z rational in den Verhältnissen der X, Y, Z (q. e. d.).

Alle durch birationale Transformation in einander überführbaren, algebraischen Gleichungen, wie hier $L=0$ und $M=0$, gehören nach *Riemann einer Klasse* an. Bei der Transformation bleibt erhalten das Geschlecht p und das System der adjungierten Φ-Kurven, hier der H-Kurven (*St.* A. F. S. 163 und 171). Daraus ergibt sich, daß $M=0$ vom Geschlecht $p=3$ ist und keine Doppelpunkte hat ($n=4$; $p=3$; $r=0$) und daß die 28 Kurven $H_m = a_m X + b_m Y + c_m Z = 0$ die 28 Doppeltangenten von $M=0$ sind. Hiermit hat man den Übergang von der *Schottky*schen zu der *Riemann-Weber*schen Behandlung (vergl. Einleitung). Zugleich ist durch unsere Gleichungen die Aufgabe gelöst, zu 7 einem F. S. von P. Ch. entsprechenden Doppeltangenten einer Kurve 4. Grades diese selbst und ihre 21 übrigen Doppeltangenten zu bestimmen. Denn aus den Gleichungen (8.) § 3 der 7 ersten Doppeltangenten ergeben sich in (9.) § 3 die Gleichungen der 21 übrigen Doppeltangenten und in (2.) die Gleichung der Kurve selbst.

Man kann noch Folgendes bemerken, wobei der Kürze halber x, y, z durch x_1, x_2, x_3 und X, Y, Z durch X_1, X_2, X_3 ersetzt sei. Die birationale Transformation besteht in der Verbindung der Gleichungen (vgl. *St.* A. F. S. 159 ff.):

$$L(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad \text{und} \qquad X_i = X_i(x_1, x_2, x_3),$$

die durch Elimination von (x_1, x_2, x_3) übergehen in die neuen Gleichungen

$$M(X_1, X_2, X_3) = 0 \qquad \text{und} \qquad x_i = x_i(X_1, X_2, X_3).$$

Trägt man die Ausdrücke für X_1, X_2, X_3 in M ein, so muß man eine Identität von der Form

$$M(\overset{4}{\overline{X_1, X_2, X_3}}) = L(\overset{6}{\overline{x_1, x_2, x_3}}) \cdot N(\overset{6}{\overline{x_1, x_2, x_3}}).$$

erhalten. Die Kurve $N(x_1, x_2, x_3) = 0$ ist vom 6. Grade und hat in den sieben Doppelpunkten von $L=0$ ebenfalls Doppelpunkte. Denn für einen Doppelpunkt von $L=0$ verschwindet M in der 4., L in der 2. Ordnung, also muß auch N in der zweiten Ordnung verschwinden. Die Kurven $L=0$ und $N=0$ haben außer diesen Doppelpunkten noch 8 Schnittpunkte. Die Funktionen, die a. a. O. mit F, G, L bezeichnet wurden, sind hier L, M, N und die dortigen Zahlen $n, n_1, \sigma, \varrho, r, r_1$ sind hier $6, 4, 3, 3, 7, 0$.

Bezeichnet man mit e die Ebene der Punkte (x_1, x_2, x_3), mit E die von (X_1, X_2, X_3), so folgt: Eine Gerade in E, also $A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 = 0$ hat mit $M=0$ 4 Punkte gemein; diese entsprechen den 4 Punkten, die $L=0$ mit der transformierten Kurve 3. Ordnung d. i. $A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 = 0$, ausgedrückt in (x_1, x_2, x_3) außer den Doppelpunkten gemein hat. Und eine Gerade in e, also $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ hat mit $L=0$ 6 Punkte und mit $N=0$ ebenfalls 6 Punkte gemein. Diese 12 Punkte entsprechen den 12 Punkten, die $M=0$ mit der transformierten Kurve 3. Ordnung, d. i. $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ ausgedrückt in (X_1, X_2, X_3) gemein hat.

Wir schließen hieran noch die Aufstellung der zu $L(x, y, z) = 0$ oder $M(X, Y, Z) = 0$ gehörigen Integrale erster Gattung. Ist H eine beliebige $L=0$ adjungierte Funktion dritten Grades in (x, y, z) oder eine lineare Funktion von X, Y, Z mit beliebigen Koeffizienten, so behaupten wir, das *allgemeine Integral erster Gattung ist von der einfachen Form**)

$$v = \int \frac{H\Delta}{R}. \tag{5.}$$

Um zu zeigen, daß dies Integral allenthalben endlich ist, stellen wir dasselbe in den Funktionen H_α und $H_{\alpha\beta}$ dar. Indem man (13.) § 1 anwendet, ferner $F_{\beta\gamma}$ nach (6.) § 4 durch $\sqrt{H_\beta H_\gamma H_{\beta\gamma}} : \sqrt{R}$ und dann R^3 durch den Ausdruck (7.) § 4 ersetzt, nimmt (5.) (abgesehen von einem konstanten Faktor) unter der Voraussetzung von $L=0$ oder $M=0$ die Form an

$$\int \frac{H}{\sqrt{H_\alpha H_\beta H_\gamma \dots H_\mu}} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \left[(-1)^{\beta\gamma . \alpha} \sqrt{H_\beta H_\gamma H_{\beta\gamma}}\, dH_\alpha\right]. \tag{6.}$$

Betrachtet man nun X, Y, Z als die Integrationsvariable, so könnte dies Integral unendlich werden in den Berührungspunkten der sieben Doppel-

*) *Schottky*, A. F. S. 102. Der Beweis für die Endlichkeit ist dort mittels einer weniger einfachen Umformung geführt.

tangenten $H_\alpha=0$, $H_\beta=0, \ldots H_\mu=0$ von $M=0$. Es ist aber leicht zu sehen, daß das Integral z. B. in den Berührungspunkten von $H_\alpha=0$ endlich bleibt. In diesen Punkten sind alle anderen H endlich und von Null verschieden. Daher reduziert sich für einen solchen Punkt das erste zum Index α gehörige Glied von (6.), abgesehen von einem endlich bleibenden Faktor auf $\int \frac{dH_\alpha}{\sqrt{H_\alpha}} = 2\sqrt{H_\alpha}$; das zweite Glied, da sich $\sqrt{H_\alpha}$ im Zähler und Nenner weghebt auf $\int dH_\beta = H_\beta$, das dritte Glied ebenso auf H_γ. Die drei Glieder von (6.) bleiben also in den Berührungspunkten von $H_\alpha=0$ endlich. Ebenso ist (6.) endlich für die Berührungspunkte von $H_\beta=0$ und $H_\gamma=0$ und folglich das Integral (5.), das für alle Indizes symmetrisch ist, endlich für die Berührungspunkte aller sieben Doppeltangenten $H_\alpha=0, \ldots H_\mu=0$, d. h. v ist ein Integral erster Gattung.

Indem man H durch die drei linear unabhängigen Funktionen X, Y, Z ersetzt, hat man in

$$(7.)\qquad v_1 = \int \frac{X\Delta}{R}, \quad v_2 = \int \frac{Y\Delta}{R}, \quad v_3 = \int \frac{Z\Delta}{R}$$

drei linear unabhängige, zu $L=0$ oder $M=0$ gehörige Integrale erster Gattung.

Denkt man sich zu der algebraischen Grundgleichung $L=0$ oder $M=0$ eine Verzweigungsfläche T und in ihr ein kanonisches Querschnittsystem konstruiert, so kann man mittels der drei Integrale (7.) die drei zu dem *Querschnittsystem gehörigen Normalintegrale* aufstellen, die die Form haben

$$(8.)\qquad u_1 = \int \frac{f_1(x)\Delta}{R}, \quad u_2 = \int \frac{f_2(x)\Delta}{R}, \quad u_3 = \int \frac{f_3(x)\Delta}{R}$$

und in § 8 benutzt werden.

§ 6. Die Funktionen P, P', Q.*)

Wir schließen die algebraischen Untersuchungen mit der Betrachtung gewisser Funktionen oder Kurven, die von einem *willkürlich auf* $L=0$ *gewählten Punkte* (ξ, η, ζ) (bei *Schottky* (x', y', z')) *abhängen.* Aus dem Bestehen der Identität (11.) § 3

$$(1.)\qquad xX + yY + zZ = 0$$

*) *Schottky*, B. M. 1903 S. 1032 und 1904 S. 487.

ergeben sich eine Reihe von Abhängigkeiten zwischen den Koeffizienten der 3 Funktionen X, Y, Z, die wir als Bedingungen (B) bezeichnen und die man findet, indem man für X, Y, Z homogene Ausdrücke 3. Grades in (1.) einträgt und die Koeffizienten von $x^4, x^3 y, \ldots z^4$ einzeln $=0$ setzt.

Bezeichnet nun vorerst (ξ, η, ζ) oder kurz (ξ) einen *beliebigen Punkt der Ebene*, ferner X', Y', Z' die Werte von X, Y, Z gebildet für diesen Punkt und setzt man

$$(2.) \qquad P = \xi X + \eta Y + \zeta Z, \qquad P' = x X' + y Y' + z Z',$$

so folgen aus den Bedingungen (B) die Identitäten

$$(3.) \qquad x \frac{\partial P'}{\partial \xi} + y \frac{\partial P'}{\partial \eta} + z \frac{\partial P'}{\partial \zeta} = -\left(\xi \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial P}{\partial y} + \zeta \frac{\partial P}{\partial z}\right) = Q$$

und

$$(4.) \qquad 2P = -\left(x \frac{\partial Q}{\partial \xi} + y \frac{\partial Q}{\partial \eta} + z \frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right), \qquad 2P' = \xi \frac{\partial Q}{\partial x} + \eta \frac{\partial Q}{\partial y} + \zeta \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Die Funktion P ist homogen vom 3. Grade in (x, y, z), vom 1. Grade in (ξ, η, ζ); P' vom 1. Grade in (x, y, z), vom 3. Grade in (ξ, η, ζ); Q vom 2. Grade sowohl in (x, y, z) wie in (ξ, η, ζ) und alternierend für beide Punkte. Ferner zeigen die Gleichungen (3.) und (4.), daß Q sowohl aus P wie aus P' und umgekehrt P und P' aus Q durch Polarenbildung hervorgehen.

Macht man nun (ξ, η, ζ) *zu einem Punkt der Kurve* $L=0$, so zerfällt Q auf doppelte Weise in zwei Faktoren. Der Ausdruck für Q lautet, entwickelt nach Potenzen von x, y, z:

$$(5.) \qquad Q = x^2 \frac{\partial X'}{\partial \xi} + xy\left(\frac{\partial X'}{\partial \eta} + \frac{\partial Y'}{\partial \xi}\right) + \cdots + z^2 \frac{\partial Z'}{\partial \zeta}.$$

Da nun (ξ, η, ζ) der Gleichung $L=0$, also auch der Gleichung (10.) § 4 genügen soll, so kann man aus der letzteren die Koeffizienten $\frac{\partial X'}{\partial \eta} + \frac{\partial Y'}{\partial \xi}$ usw. in (5.) eintragen und erhält

$$(6.) \qquad Q = P' S',$$

wenn

$$(7.) \qquad S' = x \frac{\partial \log X'}{\partial \xi} + y \frac{\partial \log Y'}{\partial \eta} + z \frac{\partial \log Z'}{\partial \zeta}$$

gesetzt wird. Vertauscht man x, y, z mit ξ, η, ζ, so folgt, da Q alternierend ist,

$$(8.) \qquad Q = P' S' = -PS,$$

wo

$$(9.)\qquad S = \xi \frac{\partial \log X}{\partial x} + \eta \frac{\partial \log Y}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \log Z}{\partial z}.$$

Man kann nun leicht die Schnittpunkte (x, y, z) oder kurz x angeben, welche $L=0$ mit den Kurven $P=0$, $P'=0$, $S=0$, $S'=0$ hat; es hat $L=0$ mit

$P=0$ 18 Schnittpunkte, nämlich den Punkt ξ, die 7 Doppelpunkte $\alpha, \dots \mu$ und 3 weitere Punkte, die wir mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ bezeichnen; ferner mit

$P'=0$ 6 Schnittpunkte, nämlich ξ und 5 weitere Punkte, die mit $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_5$ bezeichnet seien. Folglich hat nach (8.) $L=0$ mit

$S'=0$ 6 Schnittpunkte, nämlich $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$*) und drei weitere Punkte, die mit $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ bezeichnet seien, und mit

$S=0$ 8 Schnittpunkte, nämlich $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ und $\zeta_1, \dots \zeta_5$; außerdem wird

$S=\infty$ in den 7 Doppelpunkten $\alpha, \dots \mu$ von $L=0$; schließlich wird

$Q=0$ in 12 Punkten, nämlich $\xi, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; \zeta_1, \dots \zeta_5; \xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$.

Für $x=\xi$ ist P, P', Q gleich 0; wir brauchen später die Werte von dP, dP', dQ, gebildet für $x=\xi$. Hierzu ersetzen wir vorübergehend x, y, z durch x_1, x_2, x_3; ξ, η, ζ durch ξ_1, ξ_2, ξ_3; X, Y, Z durch X_1, X_2, X_3, so daß (vergl. (12.) § 3)

$$(10.)\qquad \Delta = \sum_i x_i dX_i = -\Sigma X_i dx_i, \qquad \Delta' = \sum_i \xi_i dX_i' = -\Sigma X_i' d\xi_i.$$

Wir setzen ferner, wenn $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ eine homogene Funktion von x_1, x_2, x_3 ist,

$$(11.)\qquad \Psi(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3) = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \cdots,$$

indem wir in dieser Entwicklung unter $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots$ die Glieder der 0., 1., 2., ... Dimension in dx_1, dx_2, dx_3 verstehen. Aus der Identität $\sum_i x_i X_i = 0$ folgt

$$\sum_i (x_i + dx_i)\left(X_i + dX_i + \frac{1}{2} \sum_{\varkappa,\lambda} \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda} dx_\varkappa dx_\lambda + \cdots\right) = 0,$$

also wegen (10.) die Identität

$$(12.)\qquad \sum_i dx_i\, dX_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_\varkappa \sum_\lambda x_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda} dx_\varkappa dx_\lambda = 0.$$

---

*) In $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ kann nicht $P'=0$ sein. Denn die Punkte der Kurven $L(x, y, z)=0$ und $M(X, Y, Z)=0$ entsprechen sich eindeutig. Aus den Gleichungen $P=0$, $P'=0$ würde in Verbindung mit $xX+yY+zZ=0$ und $\xi X'+\eta Y'+\zeta Z'=0$ folgen, daß die 3 Determinanten $YZ'-ZY'$, $ZX'-XZ'$, $XY'-YX'$ gleich 0 wären, was nicht der Fall.

Es ist nun

$$(13.)\qquad P=\sum_i \xi_i X_i,\qquad P'=\sum_i x_i X_i',\qquad Q=\sum_i\sum_\varkappa x_i x_\varkappa \frac{\partial X_\varkappa'}{\partial \xi_i},$$

folglich

$$P_1=dP=\Sigma \xi_i dX_i,\qquad P_1'=dP'=\Sigma X_i' dx_i,$$

$$Q_1=dQ=\sum_i\sum_\varkappa (x_i dx_\varkappa + x_\varkappa dx_i)\frac{\partial X_\varkappa'}{\partial \xi_i},$$

$$P_2=\frac{1}{2}\sum_{i,\varkappa,\lambda}\xi_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda}dx_\varkappa dx_\lambda;\ P_2'=0;\ Q_2=\sum_{i,\varkappa} dx_i dx_\varkappa \frac{\partial X_\varkappa'}{\partial \xi_i}$$

und für $x=\xi$ mit Rücksicht auf (10.) und (12.):

$$(14.)\qquad (P_1)_\xi=+\Delta';\quad (P_1')_\xi=-\Delta';\quad (Q_1)_\xi=-3\Delta'+\Delta'=-2\Delta';$$

$$(15.)\qquad (P_2)_\xi=-\sum_i dX_i' d\xi_i;\quad (P_2')_\xi=0;\quad (Q_2)_\xi=\sum_\varkappa dX_\varkappa' d\xi_\varkappa.$$

§ 7. Die Funktionen $\Psi_{\varkappa\lambda\mu}$.*)

Mit Hilfe von P, P', Q definieren wir weitere Funktionen, die von zwei in der Ebene beliebig gewählten Punkten x und ξ abhängen. Wir bilden die 7 Funktionen (in abgekürzter Schreibweise)

$$(1.)\qquad \psi_\lambda=|x\quad \xi\quad a_\lambda|,$$

und die 21 Funktionen

$$(2.)\qquad \psi_{\varkappa\lambda}=|x\quad \xi\quad a_{\varkappa\lambda}|,$$

wo $a_{\varkappa\lambda}, b_{\varkappa\lambda}, c_{\varkappa\lambda}$ die in (10.) § 3 definierten Koeffizienten sind. Die 28 Funktionen $\psi_\varkappa$ und $\psi_{\varkappa\lambda}$ sind vom 1. Grade und alternierend in x und ξ und sind durch *dieselben* Relationen mit

$$(2^a.)\qquad y\zeta-z\eta,\quad z\xi-x\zeta,\quad x\eta-y\xi$$

verbunden, wie die 28 Funktionen $\Pi_\varkappa$ und $\Pi_{\varkappa\lambda}$ mit X, Y, Z.

Wir behaupten nun, es besteht für alle Punkte x und ξ der Ebene die Identität

$$(3.)\qquad PF_{\lambda\mu}'^2-P'F_{\lambda\mu}^2+QF_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}'=\gamma\psi_\lambda\psi_\mu\psi_{\lambda\mu},$$

worin $\gamma=1:g$ und $g=g_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta g_\varkappa g_\lambda g_\mu$ ist.

In der Tat, der Ausdruck der *rechten* Seite $\psi_\lambda\psi_\mu\psi_{\lambda\mu}$ ist alternierend in x und ξ und für jedes vom 3. Grade; er stellt ferner, gleich 0 gesetzt,

*) *Schottky*, B. M. 1903. S. 1027—1030.

eine Kurve 3. Grades in x dar, die in $x=\xi$ einen dreifachen Punkt hat und außerdem durch die 3 Punkte $x=a_\lambda, a_\mu, a_{\lambda\mu}$ einfach hindurchgeht. Eine zweite Kurve 3. Grades in x mit denselben Eigenschaften muß mit der ersten, abgesehen von einem konstanten Faktor, identisch sein.

Bezeichnet man nun die *linke* Seite von (3.) abkürzend mit Ψ, so ist Ψ alternierend in x und ξ und für jedes vom 3. Grade. Es hat ferner $\Psi=0$ in $x=\xi$ einen dreifachen Punkt oder es verschwinden die Ausdrücke Ψ_1 und Ψ_2 (vergl. (11.) § 6) für $x=\xi$. Denn es ist

$$\Psi_1=d\Psi=P_1F'^2_{\lambda\mu}-P'_1F^2_{\lambda\mu}-2P'F_{\lambda\mu}dF_{\lambda\mu}+Q_1F_{\lambda\mu}F'_{\lambda\mu}+QF'_{\lambda\mu}dF_{\lambda\mu}.$$

Für $x=\xi$ verschwindet das dritte und fünfte Glied für sich (da P' und Q gleich 0 werden) und die beiden ersten heben sich gegen das vierte Glied auf wegen (14.) § 6. Daher ist $(\Psi_1)_\xi=0$. Ferner ist

$$\Psi_2=P_2F'^2_{\lambda\mu}-P'_2F^2_{\lambda\mu}-4P'_1F_{\lambda\mu}dF_{\lambda\mu}-2P'dF_{\lambda\mu}dF_{\lambda\mu}+Q_2F_{\lambda\mu}F'_{\lambda\mu}+2Q_1F'_{\lambda\mu}dF_{\lambda\mu}.$$

Für $x=\xi$ verschwindet das zweite und vierte Glied, ferner heben sich auf das erste und fünfte Glied (nach (15.) § 6) und das dritte und sechste Glied (nach (14.) § 6). Daher ist auch $(\Psi_2)_\xi=0$. Da der Ausdruck Ψ außerdem für $x=a_\lambda$ und $x=a_\mu$ verschwindet, so bleibt zum Beweise der Identität (3.) nur noch zu zeigen, daß Ψ auch verschwindet, wenn $x=a_{\lambda\mu}$ wird, und daß sich Ψ von $\psi_\lambda\psi_\mu\psi_{\lambda\mu}$ durch den Faktor γ unterscheidet. Ich muß mir indes den algebraischen Beweis dieser Behauptungen, der nicht ganz leicht zu sein scheint, vorbehalten.*) Die Identität (3.) läßt sich schreiben

$$QF_{\lambda\mu}F'_{\lambda\mu}=P'F^2_{\lambda\mu}-PF'^2_{\lambda\mu}+\gamma\psi_\lambda\psi_\mu\psi_{\lambda\mu} \tag{4.}$$

und stellt daher Q auf 21 Arten dar.

Wir entwickeln nun aus (4.) neue Gleichungen *unter der Voraussetzung, daß die Punkte x und ξ der Gleichung $L=0$ genügen.* Da alsdann die Gleichungen gelten ((6.) § 4)

$$H_\lambda H_\mu H_{\lambda\mu}=RF^2_{\lambda\mu},\qquad H'_\lambda H'_\mu H'_{\lambda\mu}R'F'^2_{\lambda\mu},$$

so folgt aus (4.)

$$RR'QF_{\lambda\mu}F'_{\lambda\mu}=R'P'H_\lambda H_\mu H_{\lambda\mu}-RPH'_\lambda H'_\mu H'_{\lambda\mu}+\gamma RR'\psi_\lambda\psi_\mu\psi_{\lambda\mu}. \tag{5.}$$

---

*) Herr *Schottky* beweist die Identität (3.) oder vielmehr die Gleichung (5.) auf längerem transzendentem Wege. B. M. 1903 S. 1030.

Dieser Ausdruck stellt, als Funktion von (x, y, z) gleich 0 gesetzt, eine Kurve 10. Grades dar, die mit $L=0$ 60 Schnittpunkte hat, die sich leicht angeben lassen. Von den Schnittpunkten fallen nämlich je 6 in die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa$ und je 8 in die Punkte λ, μ. Dies zeigt ebenso die linke Seite von (5.) nach den Bemerkungen auf S. 167, wie die rechte Seite von (5.), wenn man die Glieder einzeln betrachtet. Ferner fällt, wie die linke Seite von (5.) und die Bemerkungen auf S. 174 zeigen, je ein Schnittpunkt in ξ; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; $\zeta_1, \ldots \zeta_5$; $p_{\lambda\mu}, q_{\lambda\mu}$; $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$. Dies sind zusammen 60 Punkte.

Bildet man (5.) für alle Kombinationen λ, μ, multipliziert mit willkürlichen Koeffizienten und addiert, so kann man Ausdrücke der folgenden Art aufstellen:

$$(6.)\qquad \begin{cases} R'P'TX - RPT'X' + \gamma RR't(y\zeta - z\eta), \\ R'P'TY - RPT'Y' + \gamma RR't(z\xi - x\zeta), \\ R'P'TZ - RPT'Z' + \gamma RR't(x\eta - y\xi), \end{cases}$$

in denen T eine homogene Funktion 2. Grades in X, Y, Z mit beliebigen Koeffizienten, T' dieselbe Funktion in X', Y', Z' und t dieselbe Funktion in den Ausdrücken (2ᵃ.) ist. Die drei Funktionen (6.) stellen, gleich 0 gesetzt, drei Kurven 10. Grades in (x, y, z) dar. Von ihren Schnittpunkten x mit $L=0$ fallen je 6 in die 7 Punkte $\alpha, \beta, \ldots \mu$ und je einer in die Punkte ξ; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; $\zeta_1, \ldots \zeta_5$, wie die Entstehung aus (5.) lehrt. Setzt man schließlich in (6.) $T = H_\lambda H_\mu$, also $T' = H'_\lambda H'_\mu$ und $t = \psi_\lambda \psi_\mu$, multipliziert alsdann die Gleichungen (6.) bez. mit $a_\varkappa, b_\varkappa, c_\varkappa$ und addiert, so erhält man den Ausdruck

$$(7.)\qquad \Psi_{\varkappa\lambda\mu} = R'P'H_\varkappa H_\lambda H_\mu - RPH'_\varkappa H'_\lambda H'_\mu + \gamma RR'\psi_\varkappa\psi_\lambda\psi_\mu,$$

der in x und ξ alternierend und in den 3 Wertsystemen $a_\varkappa, a_\lambda, a_\mu$ trilinear und symmetrisch gebaut ist.

Gleich 0 gesetzt, stellt (7.) eine Kurve in (x, y, z) vom 10. Grade dar, von deren Schnittpunkten mit $L=0$ je 6 in die 4 Grundpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; je 8 in die 3 Punkte $\varkappa, \lambda, \mu$ und je einer in die Punkte ξ; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; $\zeta_1, \ldots \zeta_5$ fällt; die drei noch übrigen Schnittpunkte seien mit $\xi_1^{\varkappa\lambda\mu}, \xi_2^{\varkappa\lambda\mu}, \xi_3^{\varkappa\lambda\mu}$ bezeichnet; sie treten als Nullpunkte der geraden Thetafunktionen auf. (§ 8).

Aus (7.) folgt, daß zwischen den 4 Funktionen $\Psi_{\alpha\lambda\mu}, \Psi_{\beta\lambda\mu}, \Psi_{\gamma\lambda\mu}, \Psi_{\delta\lambda\mu}$ dieselben Beziehungen bestehen, wie zwischen den 4 Funktionen $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta$,

also (vergleiche (4.) § 3.):

$$(8.)\qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}[(-1)^{\{\beta\gamma\delta\}} f_{\beta\gamma\delta}\,\Psi_{\alpha\lambda\mu}] = 0.$$

Für $x=\xi$ ist $\Psi_{\varkappa\lambda\mu}$ gleich 0; wir brauchen später den Wert von $d\Psi_{\varkappa\lambda\mu}$, gebildet für $x=\xi$. Aus (7.) folgt, da $dP=+\Delta'$; $dP'=-\Delta'$ wird nach (14.) § 7,

$$(9.)\qquad (d\Psi_{\varkappa\lambda\mu})_{x=\xi} = -2R'\Delta' H'_\varkappa H'_\lambda H'_\mu.$$

II. Teil. Die Lösung des Umkehrproblems.

§ 8. Die Nullpunkte der Thetafunktionen.

Indem wir uns zur *Lösung des Umkehrproblems* für den Fall $p=3$ wenden, handelt es sich vor allem darum, die 64 Thetafunktionen aufzustellen und ihre Nullpunkte zu bestimmen. Hierzu denken wir uns zu der algebraischen Grundgleichung $L=0$ (§ 4) eine Verzweigungsfläche T und in ihr ein kanonisches Querschnittsystem konstruiert und mittels desselben die 3 zugehörigen Normalintegrale erster Gattung aufgestellt (7.) § 5:

$$(1.)\qquad u_1 = u_1^{x\xi} = \int_\xi^x du_1;\quad u_2 = u_2^{x\xi} = \int_\xi^x du_2;\quad u_3 = u_3^{x\xi} = \int_\xi^x du_3,$$

wo wie früher x und ξ beliebige Punkte von $L=0$ bedeuten. Wir brauchen jedoch diese Operationen nicht wirklich auszuführen, da wir die Normalintegrale u_h später durch die früher gefundenen Integrale v_h ersetzen werden. Es gibt nun 64 Thetafunktionen

$$(2.)\qquad \vartheta[m](u_1, u_2, u_3) = \vartheta_m((u)),$$

und zwar 28 mit ungeraden T. Ch. $[m]$, 36 mit geraden T. Ch. $[m]$. Diese 64 T. Ch. lassen sich leicht übersehen. In § 1 wurden die 64 P. Ch. aus den 7 P. Ch. (α), (β), (γ), (δ), $(\varkappa)$, (λ), (μ) eines F. S. zusammengesetzt. Addiert man zu diesen 64 P. Ch. die T. Ch. $[0]$, so erhält man die 64 T. Ch. (vergl *St.* Note 6), und zwar die 28 ungeraden T. Ch. in den Formen

$$(3.)\qquad [\alpha], [\beta], \ldots [\mu];\ [\alpha\beta], [\alpha\gamma], \ldots [\lambda\mu]$$

und die 36 geraden T. Ch. in den Formen

$$(4.)\qquad [0], [\alpha\beta\gamma], [\alpha\beta\delta], \ldots [\varkappa\lambda\mu].$$

Da $[\alpha\beta\gamma\delta\varkappa\lambda\mu]\equiv[0]$ ist, so lassen sich die dreigliedrigen Kombinationen durch die komplementären viergliedrigen ersetzen, z. B. $[\varkappa\lambda\mu]$ durch $[\alpha\beta\gamma\delta]$, was in § 11 benutzt wird.

Um die Nullpunkte der 64 Thetafunktionen (2.) zu bestimmen, oder auch den 64 Thetafunktionen gewisse Funktionen zuzuordnen, die in denselben Punkten wie sie verschwinden, wird man (vergl. *St.* A. F. S. 354) den 7 ungeraden Thetafunktionen mit den T. Ch. $[\alpha], [\beta], \dots [\mu]$ die 7 früher definierten Wurzelfunktionen $\sqrt{H_\alpha}, \sqrt{H_\beta}, \dots \sqrt{H_\mu}$ zuordnen, wie wir schon vorher (§ 1) den 7 P. Ch. $(\alpha), (\beta), \dots (\mu)$ die 7 Doppelpunkte von $L=0$ zugeordnet haben.

Hiermit sind zunächst die Nullpunkte der 7 Thetafunktionen bestimmt; es verschwindet nämlich $\vartheta_\alpha((u))$ in den 3 Punkten $x=\xi, p_\alpha, q_\alpha$ (wobei $p_\alpha=q_\alpha=\alpha$). Es sind aber zugleich die Nullpunkte aller übrigen Thetafunktionen bestimmt durch das *Abel*sche Theorem (*St.* A. F. S. 151) in folgender Weise.

1. Bezeichnet man *die drei Nullpunkte der Funktion* $\vartheta_0((u))$ mit x_1^0, x_2^0, x_3^0, so gelten die Gleichungen (vergl. *St.* A. F. S. 238)

$$(5.)\qquad \int_{p_\alpha}^{x_1^0} du_h + \int_{q_\alpha}^{x_2^0} du_h + \int_{\xi}^{x_3^0} du_h \equiv \frac{1}{2} A_h^\alpha,$$

wo $A_h^\alpha (h=1,2,3)$ das zur P. Ch. (α) gehörige Periodensystem ist. Entsprechende Gleichungen gelten für $\beta, \dots \mu$. Nun ist die Summe der 7 P. Ch. $(\alpha), \dots (\mu)$ also $(\alpha\beta\gamma\delta\varkappa\lambda\mu)\equiv 0 \pmod 2$. Daher hat man auch $\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\dots\mu} A_h^\alpha \equiv 0$. Wir schreiben dies

$$\frac{1}{2}(A_h^\varkappa + A_h^\lambda + A_h^\mu) \equiv \frac{1}{2}(A_h^\alpha + A_h^\beta + A^\gamma + A_h^\delta).$$

Trägt man die Werte der A_h aus (5.) ein und setzt abkürzend

$$\int_{y_1}^{x_1} du_h + \int_{y_2}^{x_2} du_h + \cdots + \int_{y_n}^{x_n} du_h = \int_{y_1 y_2 \dots y_n}^{x_1 x_2 \dots x_n} du_h,$$

so erhält man

$$(6.)\qquad \int_{p_\alpha q_\alpha p_\beta q_\beta p_\gamma q_\gamma p_\delta q_\delta \xi}^{p_\varkappa q_\varkappa p_\lambda q_\lambda p_\mu q_\mu x_1^0 x_2^0 x_3^0} du_h \equiv 0.$$

Hieraus aber folgt nach dem *Abel*schen Theorem die Existenz einer zu $L=0$ gehörigen algebraischen Funktion N_0 von (x, y, z), die in den

unteren Grenzpunkten von (6.) $=\infty^1$, in den oberen $=0^1$ wird. Andererseits aber wird die Funktion $N = Q\,G_{\alpha\beta}\,G_{\gamma\delta} : P\,P'\,F_{\alpha\beta}\,F_{\gamma\delta}$ in denselben Punkten $p_\alpha, q_\alpha, p_\beta, q_\beta, p_\gamma, q_\gamma, p_\delta, q_\delta, \xi$ gleich ∞^1 und in den Punkten $p_\varkappa, q_\varkappa, p_\lambda, q_\lambda, p_\mu, q_\mu, \xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ gleich 0^1 (s. § 6). Daher würde der Quotient beider Funktionen $N_0 : N = \infty^1$ in $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ und $=0^1$ in x_1^0, x_2^0, x_3^0, d. h. er wäre eine Funktion dritter Ordnung. Das ist nicht möglich (s. *St.* Note 2, § 10, Satz Vb); daher folgt, daß die Punkte x_1^0, x_2^0, x_3^0 mit den Punkten $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ zusammenfallen, oder daß die drei letztgenannten Punkte gerade die Nullpunkte der Funktion $\vartheta_0((u))$ sind.

2. Bezeichnet man die *drei Nullpunkte der Funktion* $\vartheta_{\varkappa\lambda}((u))$ mit $x_1^{\varkappa\lambda}, x_2^{\varkappa\lambda}, x_3^{\varkappa\lambda}$, so sind diese Punkte bestimmt durch die Kongruenz

$$\int_{\xi_1^0\,\xi_2^0\,\xi_3^0}^{x_1^{\varkappa\lambda}\,x_2^{\varkappa\lambda}\,x_3^{\varkappa\lambda}} du_h \equiv \frac{1}{2}(A_h^\varkappa \pm A_h^\lambda)$$

oder nach (5.) durch

$$\int_{p_\varkappa\,q_\varkappa\,\xi_1^0\,\xi_2^0\,\xi_3^0}^{p_\lambda\,q_\lambda\,x_1^{\varkappa\lambda}\,x_2^{\varkappa\lambda}\,x_3^{\varkappa\lambda}} du_h \equiv 0\,.$$

Hiernach existiert eine algebraische Funktion $N_{\varkappa\lambda}$, die in den unteren Grenzpunkten dieser Kongruenz $=\infty^1$, in den oberen $=0^1$ wird. Andererseits hat die Funktion $PP'F_{\varkappa\lambda} : QH_\varkappa$ die ∞^1-Punkte $p_\varkappa, q_\varkappa, \xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ und die 0^1-Punkte p_λ, q_λ und $\xi, p_{\varkappa\lambda}, q_{\varkappa\lambda}$. Daher müssen wie oben die früher bestimmten Punkte $\xi, p_{\varkappa\lambda}, q_{\varkappa\lambda}$ mit $x_1^{\varkappa\lambda}, x_2^{\varkappa\lambda}, x_3^{\varkappa\lambda}$ zusammenfallen und die Nullpunkte von $\vartheta_{\varkappa\lambda}((u))$ sein.

3. Bezeichnet man *die drei Nullpunkte der Funktion* $\vartheta_{\varkappa\lambda\mu}((u))$ mit $x_1^{\varkappa\lambda\mu}, x_2^{\varkappa\lambda\mu}, x_3^{\varkappa\lambda\mu}$, so sind diese Punkte bestimmt durch

$$\int_{\xi_1^0\,\xi_2^0\,\xi_3^0}^{x_1^{\varkappa\lambda\mu}\,x_2^{\varkappa\lambda\mu}\,x_3^{\varkappa\lambda\mu}} du_h \equiv \frac{1}{2}(A_h^\varkappa \pm A_h^\lambda \pm A_h^\mu) \equiv \frac{1}{2}(A_h^{\varkappa\lambda} - A_h^\mu)$$

oder nach (5.) durch

$$\int_{p_{\varkappa\lambda}\,q_{\varkappa\lambda}\,\xi_1^0\,\xi_2^0\,\xi_3^0}^{p_\mu\,q_\mu\,x_1^{\varkappa\lambda\mu}\,x_2^{\varkappa\lambda\mu}\,x_3^{\varkappa\lambda\mu}} du_h \equiv 0\,.$$

Hiernach existiert eine Funktion $N_{\varkappa\lambda\mu}$, die in den unteren Grenzpunkten $=\infty^1$, in den oberen $=0^1$ wird. Da nun die Funktion $\Psi_{\varkappa\lambda\mu} : RQF_{\varkappa\lambda}$ in $p_{\varkappa\lambda}, q_{\varkappa\lambda}, \xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ gleich ∞^1 und in $p_\mu, q_\mu, \xi_1^{\varkappa\lambda\mu}, \xi_2^{\varkappa\lambda\mu}, \xi_3^{\varkappa\lambda\mu}$ gleich 0^1 wird, so

fallen die Punkte $\xi_i^{\varkappa\lambda\mu}$ mit $x_i^{\varkappa\lambda\mu}$ $(i=1,2,3)$ zusammen und sind die Nullpunkte von $\vartheta_{\varkappa\lambda\mu}((u))$.

Im Vorstehenden ist der Satz bewiesen:

Ordnet man den 7 Thetafunktionen $\vartheta_a((u))$ die 7 Wurzelfunktionen $\sqrt{H_a}$ $(a=\alpha,\beta,\ldots\mu)$ zu, so besitzen die 7 ungeraden Thetafunktionen $\vartheta_a((u))$ bez. die 0^1-Punkte ξ, p_a, q_a $(p_a=q_a=a)$, die 21 ungeraden Thetafunktionen $\vartheta_{\varkappa\lambda}((u))$ bez. die 0^1-Punkte $\xi, p_{\varkappa\lambda}, q_{\varkappa\lambda}$, die 35 geraden Thetafunktionen $\vartheta_{\varkappa\lambda\mu}((u))$ bez. die 0^1-Punkte $\xi_1^{\varkappa\lambda\mu}, \xi_2^{\varkappa\lambda\mu}, \xi_3^{\varkappa\lambda\mu}$ und $\vartheta_0((u))$ die 0^1-Punkte $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$.

§ 9. Algebraische Darstellung von Thetaquotienten mit eingliedrigen Argumenten $((u))$.*)

Nach der Bestimmung der Nullpunkte der Thetafunktionen $\vartheta_0((u))$, $\vartheta_\varkappa((u))$, $\vartheta_{\varkappa\lambda}((u))$, $\vartheta_{\varkappa\lambda\mu}((u))$ mit den eingliedrigen Argumenten $((u))$ ist es leicht, die Quotienten dieser Funktionen durch Wurzelfunktionen algebraisch und symmetrisch in den Koordinaten der Punkte x und ξ darzustellen. Man hat hierzu (vergl. *St.* A. F. S. 242) nur solche Quotienten von Wurzelfunktionen zu bilden, die in denselben Punkten $=\infty^1$ und 0^1 werden, wie die Thetaquotienten. Wir stellen dreierlei Formeln auf.

1. *Sind* $[m]$ *und* $[n]$ *zwei ungerade T. Ch.* (von der Form $[\varkappa]$ oder $[\varkappa\lambda]$), so ist $\vartheta_m((u)):\vartheta_n((u))=0^1$ in p_m, q_m und $=\infty^1$ in p_n, q_n, also 0 und ∞ in denselben Punkten wie $\sqrt{H_m}:\sqrt{H_n}$.

Man hat daher unmittelbar die Gleichung

$$\frac{\vartheta_m((u))}{\vartheta_n((u))}=\frac{\gamma_m}{\gamma_n}\,\frac{\sqrt{H_m H'_m}}{\sqrt{H_n H'_n}}. \tag{1.}$$

Da die rechte Seite wie die linke für x und ξ symmetrisch sind, so ist $\gamma_m:\gamma_n$ eine von ξ wie von x unabhängige Konstante.

2. *Ist* $[m]$ *eine ungerade T. Ch.* ($[\varkappa]$ oder $[\varkappa\lambda]$), so ist $\vartheta_m((u)):\vartheta_0((u))=0^1$ in ξ, p_m, q_m und $=\infty^1$ in $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$. Man hat daher

$$\frac{\vartheta_m((u))}{\vartheta_0((u))}=\frac{\gamma_m}{\gamma_0}\,\frac{P.P'}{Q}\,\frac{\sqrt{H_m H'_m}}{\sqrt{RR'}}, \tag{2.}$$

da die rechte Seite nach § 4 und § 6 in denselben Punkten $=0^1$ und $=\infty^1$ wird. Die Konstante $\gamma_m:\gamma_0$ ist wie in (1.) unabhängig von x und ξ.

*) *Schottky*, A. F. S. 56. 68.

3. *Der Quotient zweier geraden Thetafunktionen* $\vartheta_{\varkappa\lambda\mu}((u)):\vartheta_0((u))$ ist gleich 0^1 in $\xi_1^{\varkappa\lambda\mu}, \xi_2^{\varkappa\lambda\mu}, \xi_3^{\varkappa\lambda\mu}$ und gleich ∞^1 in $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$; man hat daher

$$(3.)\qquad \frac{\vartheta_{\varkappa\lambda\mu}((u))}{\vartheta_0((u))} = \frac{\gamma_{\varkappa\lambda\mu}}{\gamma_0}\, \frac{\Psi_{\varkappa\lambda\mu}}{Q\cdot\sqrt{RR'}\sqrt{H_\varkappa H_\lambda H_\mu H'_\varkappa H'_\lambda H'_\mu}},$$

da die rechte Seite in denselben Punkten $=0^1$ und $=\infty^1$ wird. Die Konstante $\gamma_{\varkappa\lambda\mu}:\gamma_0$ ist wie in (1.) unabhängig von x und ξ.

Die Konstanten γ *in* (1.), (2.), (3.) *bestimmen sich durch die Substitution* $x=\xi$; doch sind hierzu einige Vorbereitungen nötig. Da für $x=\xi$ die ungeraden Funktionen $\vartheta_m((u))$, $\vartheta_n((u))$, ferner P, P', Q und $\Psi_{\varkappa\lambda\mu}$ verschwinden, so treten gewisse Quotienten unter der unbestimmten Form 0:0 auf. Man hat dann von Zähler und Nenner das Differential zu bilden und darnach $x=\xi$ zu setzen. An jede der drei Gleichungen (1.)—(3.) knüpft sich eine solche Bestimmung an (vergl. *St.* A. F. S. 272 ff.).

1. In (1.) hat man für $x=\xi$

$$(4.)\qquad \left[\frac{\vartheta_m((u))}{\vartheta_n((u))}\right]_{x=\xi} = \frac{0}{0} = \left[\frac{d\vartheta_m((u))}{d\vartheta_n((u))}\right]_{x=\xi} = \frac{\gamma_m H'_m}{\gamma_n H'_n}.$$

Benutzt man die Normaldifferentiale erster Gattung (vergl. (7.) § 5)

$$(5.)\qquad du_1 = \frac{f_1(x)\Delta}{R},\quad du_2 = \frac{f_2(x)\Delta}{R},\quad du_3 = \frac{f_3(x)\Delta}{R}$$

und die Abkürzung

$$(6.)\qquad \left[\frac{\partial\vartheta_m((u))}{\partial u_i}\right]_{u=0} = \vartheta^i_m,$$

so erhält man

$$(7.)\qquad d\vartheta_m((u)) = \sum_i \vartheta^i_m du_i = \frac{\Delta}{R}\sum_i \vartheta^i_m f_i(x)$$

und folglich aus (4.)

$$\frac{\sum_i \vartheta^i_m f_i(\xi)}{\sum_i \vartheta^i_n f_i(\xi)} = \frac{\gamma_m H'_m}{\gamma_n H'_n}.$$

Da nun ξ ein beliebiger Punkt von $L=0$ und $\gamma_m:\gamma_n$ unabhängig von ξ ist, so muß diese Gleichung für jeden Punkt der Kurve $L=0$ identisch erfüllt sein; folglich hat man für jede ungerade T. Ch. $[m]$, wenn l_m ein Proportionalitätsfaktor ist,

$$(8.)\qquad \sum_i \vartheta^i_m f_i(x) = l_m H_m = l_m(a_m X + b_m Y + c_m Z)$$

und aus (7.) und (8.)

$$(9.)\qquad [d\vartheta_m((u))]_{x=\xi} = \frac{\Delta'}{R'} l_m H'_m,$$

also

$$(9^a.)\qquad \left[\frac{d\vartheta_m((u))}{d\vartheta_n((u))}\right]_{x=\xi} = \frac{l_m H'_m}{l_n H'_n}.$$

2. In (2.) ist für $x=\xi$ $\vartheta_m((u))$, P, P', Q gleich 0. Nach § 6 ist für $x=\xi$ $dP=\Delta'$; $dP'=-\Delta'$; $dQ=-2\Delta'$. Daher wird der unbestimmte Quotient

$$(10.)\qquad \left[\frac{\vartheta_m((u))Q}{PP'}\right]_{x=\xi} = \frac{0}{0} = \left[\frac{d\vartheta_m((u))dQ}{dP\,dP'}\right]_{x=\xi} = \frac{2l_m H'_m}{R'}.$$

3. In (3.) ist für $x=\xi$ Q und $\Psi_{\varkappa\lambda\mu}$ gleich 0 und $dQ=-2\Delta'$, $d\Psi_{\varkappa\lambda\mu}=-2R'\Delta' H'_\varkappa H'_\lambda H'_\mu$. Daher wird der unbestimmte Quotient

$$(11.)\qquad \left[\frac{\Psi_{\varkappa\lambda\mu}}{Q}\right]_{x=\xi} = \frac{0}{0} = \left[\frac{d\Psi_{\varkappa\lambda\mu}}{dQ}\right]_{x=\xi} = R'H'_\varkappa H'_\lambda H'_\mu.$$

Diese Wertbestimmungen geben nun sofort auch die *Werte der Konstanten* γ in (1.)—(3.). Setzt man nämlich

$$(12.)\qquad [\vartheta_0((u))]_{u=0} = c_0, \qquad [\vartheta_{\varkappa\lambda\mu}((u))]_{u=0} = c_{\varkappa\lambda\mu},$$

so folgt für $x=\xi$ aus (4.) und (9^a.)

$$(13.)\qquad \gamma_m : \gamma_n = l_m : l_n;$$

ferner aus (2.) und (10.)

$$(14.)\qquad \gamma_m : \gamma_0 = 2l_m : c_0;$$

endlich aus (3.) und (11.)

$$(15.)\qquad \gamma_{\varkappa\lambda\mu} : \gamma_0 = c_{\varkappa\lambda\mu} : c_0.$$

Die hier auftretenden Verhältnisse der *Größen* l_m, $c_{\varkappa\lambda\mu}$ und c_0 werden in § 10 *durch die Klassenmoduln* dargestellt.

Wir geben den gewonnenen Resultaten noch eine andere Form. Die drei Normalintegrale erster Gattung u_1, u_2, u_3 (vergl. 5) und die früher definierten drei Integrale erster Gattung (6.) § 5

$$(16.)\qquad v_1 = \int\frac{X\Delta}{R}, \quad v_2 = \int\frac{Y\Delta}{R}, \quad v_3 = \int\frac{Z\Delta}{R}$$

sind verbunden durch die Gleichungen der Form (s. (6.) und (8.))

$$(17.)\qquad \sum_i \vartheta^i_m u_i = l_m(a_m v_1 + b_m v_2 + c_m v_3). \qquad (m=1,2,3)$$

Die Integrale v_i sind unmittelbar gegeben, während die u_i erst aus ihnen berechnet werden müssen. Indem wir statt der u_i die v_i einführen, möge jede Funktion $\vartheta((u))$ übergehen in eine Funktion $\sigma((v))$, noch multipliziert mit einer besonderen Konstanten. Wir setzen für die *ungerade* T. Ch. $[m]$:

$$\vartheta_m((u)) = l_m \sigma_m((v)), \tag{18.}$$

für die *gerade* T. Ch. $[\varkappa\lambda\mu]$:

$$\vartheta_{\varkappa\lambda\mu}((u)) = c_{\varkappa\lambda\mu}\, \sigma_{\varkappa\lambda\mu}((v)), \tag{19.}$$

sodaß

$$\sigma_{\varkappa\lambda\mu}((0)) = 1 \tag{20.}$$

und nach (17.) und (18.)

$$\sum_i \sigma_m^i v_i = a_m v_1 + b_m v_2 + c_m v_3$$

oder

$$\sigma_m^1 = a_m, \qquad \sigma_m^2 = b_m, \qquad \sigma_m^3 = c_m. \tag{21.}$$

Hiernach kann man die Gleichungen (1.)—(3.), indem man einen Proportionalitätsfaktor ε einführt, ersetzen durch folgende:

$$\sigma_m((v)) = \frac{\vartheta_m((u))}{l_m} = \varepsilon\sqrt{H_m H_m'}, \tag{22.}$$

$$\sigma_0((v)) = \frac{\vartheta_0((u))}{c_0} = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{Q\sqrt{RR'}}{PP'}, \tag{23.}$$

$$\sigma_{\varkappa\lambda\mu}((v)) = \frac{\vartheta_{\varkappa\lambda\mu}((u))}{c_{\varkappa\lambda\mu}} = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\Psi_{\varkappa\lambda\mu}}{PP'\sqrt{H_\varkappa H_\lambda H_\mu H_\varkappa' H_\lambda' H_\mu'}}. \tag{24.}$$

Der Faktor $\varepsilon = \varepsilon(x, \xi)$ hat hiernach die Werte

$$\varepsilon = \varepsilon(x, \xi) = \frac{\sigma_m((v))}{\sqrt{H_m H_m'}} = \frac{2\sigma_0((v))\,PP'}{Q\sqrt{RR'}} \tag{25.}$$

und kann als eine *Primfunktion mit dem Nullpunkt* $x = \xi$ angesehen werden, da $\varepsilon = 0^1$ in $x = \xi$ und $= \infty^{1/2}$ in $\alpha, \beta, \ldots \mu$.

§ 10. Algebraische Darstellung von Thetaquotienten mit mehrgliedrigen Argumenten $((U))$.*

Wir entnehmen der allgemeinen Theorie folgendes. *Das Umkehrproblem sei gegeben* durch die Gleichungen $(h = 1, 2, 3)$:

*) *Weber*, A. F. S. 159, 162, 165. *Schottky*, A. F. S. 132, 137, 141, 164, vergl. auch *St.* A. F. S. 255.

$$(1.)\qquad U_k = \sum_{i=0}^{3} \int_{a_i}^{x_i} du_k,$$

worin die oberen Grenzpunkte x_0, x_1, x_2, x_3 vier beliebige Punkte von $L=0$, die unteren Grenzpunkte a_0, a_1, a_2, a_3 die Schnittpunkte einer beliebigen adjungierten Kurve 3. Grades mit $L=0$ sind. *Die Lösung des Umkehrproblems* (1.) besteht dann in der Aufstellung von Gleichungen der Form

$$\frac{\vartheta_m((U))}{\vartheta_n((U))} = \frac{\Gamma_m}{\Gamma_n} \frac{\Sigma \pm \sqrt{T_m^0(x_0)} \ldots \sqrt{T_m^3(x_3)}}{\Sigma \pm \sqrt{T_n^0(x_0)} \ldots \sqrt{T_n^3(x_3)}}$$

oder auch, wenn man einen von der Charakteristik unabhängigen Proportionalitätsfaktor E einführt, Gleichungen der Form

$$(2.)\qquad \vartheta_m((U)) = E.\Gamma_m \Sigma \pm \sqrt{T_m^0(x_0)} \ldots \sqrt{T_m^3(x_3)}.$$

Hier ist $[m]$ eine beliebige T. Ch., Γ_m eine zugehörige Konstante; ferner sind $T_m^0(x), \ldots T_m^3(x)$ homogene Ausdrücke vom dritten Grade in den H oder auch in X, Y, Z und

$$(3.)\qquad \sqrt{T_m^0(x)},\quad \sqrt{T_m^1(x)},\quad \sqrt{T_m^2(x)},\quad \sqrt{T_m^3(x)},$$

vier linear unabhängige zur T. Ch. $[m]$ gehörige Wurzelfunktionen.

Es ist nun die Aufgabe, für jede gerade und ungerade T. Ch. $[m]$ die vier Funktionen (3.) zu wählen und mit ihnen die Gleichung (2.) herzustellen. Wir benutzen dabei die früher aufgestellten, unter Voraussetzung von $L=0$ geltenden Gleichungen (6.) § 4

$$(4.)\qquad H_\varkappa H_\lambda G_{\varkappa\lambda} = RF_{\varkappa\lambda};\qquad H_\varkappa H_\lambda H_{\varkappa\lambda} = R.F_{\varkappa\lambda}^2.$$

1. $[m]=[0]$. Wir wählen für (3.) die Wurzelfunktionen

$$(5.)\qquad \sqrt{H_{\varkappa\lambda} H_{\lambda\mu} H_{\mu\varkappa}},\ \sqrt{H_{\lambda\mu} H_\lambda H_\mu},\ \sqrt{H_{\mu\varkappa} H_\mu H_\varkappa},\ \sqrt{H_{\varkappa\lambda} H_\varkappa H_\lambda},$$

oder, wenn man den Faktor $\sqrt{R}:H_\varkappa H_\lambda H_\mu$ absondert, nach (4.)

$$(5.^a)\qquad RF_{\varkappa\lambda} F_{\lambda\mu} F_{\mu\varkappa},\ H_\varkappa H_\lambda H_\mu F_{\lambda\mu},\ H_\varkappa H_\lambda H_\mu F_{\mu\varkappa},\ H_\varkappa H_\lambda H_\mu F_{\varkappa\lambda}.$$

Daß diese oder auch die vier Funktionen

$$\frac{G_{\varkappa\lambda} F_{\varkappa\mu} F_{\lambda\mu}}{H_\mu},\quad F_{\lambda\mu},\quad F_{\mu\varkappa},\quad F_{\varkappa\lambda}$$

linear unabhängig sind, ist leicht zu sehen. Denn zwischen den drei letzten Gliedern besteht keine lineare Relation. Wäre das erste linear durch sie

ausdrückbar, so müßte eine Gleichung von der Form $G_{\varkappa\lambda}F_{\varkappa\mu}F_{\lambda\mu}=H_\mu F$ bestehen, wo F eine homogene Funktion ersten Grades in (x, y, z) ist. Diese Gleichung müßte, da sie nur vom vierten Grade in (x, y, z) ist, während $L=0$ vom sechsten Grade ist, eine Identität, also H_μ durch einen der Faktoren der linken Seite teilbar sein, was nicht der Fall ist.

Setzt man nun die aus (5ᵃ.) mit den oberen Grenzpunkten in (1.) gebildete Determinante

$$(6.)\quad \Sigma \pm R^0 F^0_{\varkappa\lambda} F^0_{\lambda\mu} F^0_{\mu\varkappa}\ \ H^1_\varkappa H^1_\lambda H^1_\mu F^1_{\lambda\mu}\ \ H^2_\varkappa H^2_\lambda H^2_\mu F^2_{\mu\varkappa}\ \ H^3_\varkappa H^3_\lambda H^3_\mu F^3_{\varkappa\lambda} = \Phi_0,$$

so erhält man die Gleichung (2.) in der Form

$$(7.)\qquad \vartheta_0((U)) = E\Gamma_0 \Phi_0 \prod_{i=0}^{3} \frac{\sqrt{R^i}}{H^i_\varkappa H^i_\lambda H^i_\mu}.$$

2. $[m]=[\varkappa\lambda\mu]$. Wir wählen für (3.) die Wurzelfunktionen

$$\sqrt{H_\varkappa H_\lambda H_\mu},\ \sqrt{H_\varkappa H_{\varkappa\lambda} H_{\varkappa\mu}},\ \sqrt{H_\lambda H_{\lambda\varkappa} H_{\lambda\mu}},\ \sqrt{H_\mu H_{\mu\varkappa} H_{\mu\lambda}}$$

oder, wenn man den Faktor $1:\sqrt{H_\varkappa H_\lambda H_\mu}$ absondert, nach (4.)

$$H_\varkappa H_\lambda H_\mu,\ RF_{\varkappa\lambda}F_{\varkappa\mu},\ RF_{\lambda\varkappa}F_{\lambda\mu},\ RF_{\mu\varkappa}F_{\mu\lambda}.$$

Diese oder auch die vier Funktionen

$$\frac{H_\varkappa H_\lambda H_\mu}{R},\quad F_{\varkappa\lambda}F_{\varkappa\mu},\quad F_{\lambda\varkappa}F_{\lambda\mu},\quad F_{\mu\varkappa}F_{\mu\lambda}$$

sind linear unabhängig. Denn zwischen den drei letzten Gliedern, die, zweiten Grades in (x, y, z), in den Punkten $\varkappa, \lambda, \mu$ verschwinden, besteht keine lineare Relation. Wäre aber das erste Glied oder nach (4.) der Ausdruck $H_\mu F_{\varkappa\lambda}:G_{\varkappa\lambda}$ durch sie darstellbar, so hätte man eine Gleichung von der Form $H_\mu F_{\varkappa\lambda}=G_{\varkappa\lambda}G$, wo G eine homogene Funktion zweiten Grades in (x, y, z) ist, und diese Gleichung müßte, da sie nur vom vierten Grade ist, eine Identität sein. Es müßte also H_μ durch $G_{\varkappa\lambda}$ teilbar sein, was nicht der Fall ist.

Setzt man nun

$$(8.)\qquad \Sigma \pm H^0_\varkappa H^0_\lambda H^0_\mu\ \ R^1 F^1_{\varkappa\lambda} F^1_{\varkappa\mu}\ \ R^2 F^2_{\lambda\varkappa} F^2_{\lambda\mu}\ \ R^3 F^3_{\mu\varkappa} F^3_{\mu\lambda} = \Phi_{\varkappa\lambda\mu},$$

so erhält man für diesen Fall die Gleichung (2.) unter der Form

$$(9.)\qquad \vartheta_{\varkappa\lambda\mu}((U)) = E\Gamma_{\varkappa\lambda\mu}\Phi_{\varkappa\lambda\mu} : \prod_{i=0}^{3} \sqrt{H^i_\varkappa H^i_\lambda H^i_\mu}.$$

3. $[m]=[\varkappa]$. Wir wählen für (3.) die Wurzelfunktionen

$$X\sqrt{H_\varkappa},\ Y\sqrt{H_\varkappa},\ Z\sqrt{H_\varkappa},\ \sqrt{H_{\varkappa\lambda}H_{\lambda\mu}H_\mu}$$

oder, wenn man den Faktor $\sqrt{H_\varkappa}$ absondert und beachtet, daß nach (4.) $\sqrt{R}\sqrt{H_{\varkappa\lambda}} = G_{\varkappa\lambda}\sqrt{H_\varkappa H_\lambda}$ und $\sqrt{R}\cdot F_{\lambda\mu} = \sqrt{H_\lambda H_\mu H_{\lambda\mu}}$ ist, die 4 Funktionen

$$X,\ Y,\ Z,\ F_{\lambda\mu}G_{\varkappa\lambda},$$

die linear unabhängig sind, da dies von X, Y, Z gilt und da $F_{\lambda\mu}G_{\varkappa\lambda}$ im Punkte $x=\varkappa$ von 0 verschieden ist, während X, Y, Z in $\varkappa$ verschwinden. Setzt man nun

$$\Sigma \pm X^0 Y^1 Z^2 F_{\lambda\mu}^3 G_{\varkappa\lambda}^3 = \Phi_\varkappa, \tag{10.}$$

so erhält man für diesen Fall die Gleichung (2.) unter der Form

$$\vartheta_\varkappa((U)) = E\cdot \Gamma_\varkappa \Phi_\varkappa \prod_{i=0}^{3}\sqrt{H_\varkappa^i}. \tag{11.}$$

4. $[m]=[\varkappa\lambda]$. Wir wählen für (3.) die Wurzelfunktionen

$$X\sqrt{H_{\varkappa\lambda}},\ Y\sqrt{H_{\varkappa\lambda}},\ Z\sqrt{H_{\varkappa\lambda}},\ \sqrt{H_\lambda H_\mu H_{\varkappa\mu}}$$

oder nach (4.), indem man den Faktor $\sqrt{H_{\varkappa\lambda}}:F_{\varkappa\lambda}$ absondert,

$$XF_{\varkappa\lambda},\ YF_{\varkappa\lambda},\ ZF_{\varkappa\lambda},\ H_\lambda F_{\varkappa\mu}.$$

Diese vier Funktionen sind linear unabhängig. Denn anderenfalls müßte $H_\lambda F_{\varkappa\mu} = F_{\varkappa\lambda}H$, wo H eine homogene Funktion dritten Grades in (x, y, z) ist, eine Identität sein (weil sie nur vom vierten Grade ist), es müßte also H_λ durch $F_{\varkappa\lambda}$ teilbar sein, was nicht der Fall ist. Setzt man nun

$$\Sigma \pm X^0F_{\varkappa\lambda}^0\, Y^1F_{\varkappa\lambda}^1\, Z^2F_{\varkappa\lambda}^2\, H_\lambda^3 F_{\varkappa\mu}^3 = \Phi_{\varkappa\lambda}, \tag{12.}$$

so erhält man für diesen Fall die Gleichung (2.) unter der Form

$$\vartheta_{\varkappa\lambda}((U)) = E\,\Gamma_{\varkappa\lambda}\Phi_{\varkappa\lambda}\prod_i(\sqrt{H_{\varkappa\lambda}^i}:F_{\varkappa\lambda}^i). \tag{13.}$$

Die Formeln für $[m]$ gleich $[\varkappa]$ oder $[\varkappa\lambda]$ sind unsymmetrisch für den Index $\varkappa$ oder $\varkappa\lambda$, lassen sich aber durch symmetrische Bildungen ersetzen.*)

In (7.), (9.), (11.), (13.) sind die Determinanten Φ_n auf der rechten Seite alternierende Funktionen der vier Punkte x_0, x_1, x_2, x_3. Die Thetafunktionen

*) *Schottky*, A. F. S. 132—137 und S. 138—141.

$$\frac{\Gamma_{\varkappa\lambda\mu}}{\Gamma_0} = \frac{\vartheta_{\varkappa\lambda\mu}((P^\varkappa))}{\vartheta_0((P^\varkappa))} = (-1)^{\sum_i(\mu_i\lambda_i' + \lambda_i\mu_i')} \frac{c_{\varkappa\lambda\mu}}{c_0}.$$

Es bleibt also nur noch der Quotient $c_{\varkappa\lambda\mu} : c_0$ durch die Klassenmoduln darzustellen, was in § 12 geschieht. Die Bestimmung der Quotienten $\Gamma'_\varkappa : \Gamma'_0$ und $\Gamma'_{\varkappa\lambda} : \Gamma'_0$ ist der obigen ganz ähnlich, nur die Rechnung ist nicht so einfach.*)

§ 11. Thetarelationen.

Zum Schluß bleibt noch die Aufgabe zu lösen, die Verhältnisse der Größen $c_0, c_{\varkappa\lambda\mu}, l_\varkappa, l_{\varkappa\lambda}$, durch die in § 9 die Verhältnisse der Konstanten γ und in § 10 die der Konstanten Γ' dargestellt wurden, in den Klassenmoduln $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha), \ldots (a_\mu, b_\mu, c_\mu)$ auszudrücken. Hierzu bedürfen wir gewisser Gleichungen, die sich aus den zwischen den Thetafunktionen bestehenden Relationen ergeben. Wir entwickeln daher in diesem Paragraphen vorerst die wichtigsten und einfachsten Thetarelationen. Als Grundlage dient der Satz (*St.* A. F. S. 204), daß sich die allgemeinste Thetafunktion von der Ordnung r und mit beliebigen Argumenten $((\omega))$ linear und homogen durch höchstens r^3 solcher Thetafunktionen darstellt. Wenn wir uns auf Gleichungen zwischen denjenigen Thetafunktionen von der zweiten Ordnung beschränken, die von den Quadraten und Produkten von Thetafunktionen erster Ordnung gebildet werden, so gilt der besondere Satz (l. c. S. 217), daß sich jedes Thetaquadrat $\vartheta_m^2((\omega))$ durch höchstens acht andere Thetaquadrate, dagegen ein Thetaprodukt $\vartheta_m((\omega))\,\vartheta_n((\omega))$ durch höchstens vier Thetaprodukte mit derselben T. Ch. $[mn]$ darstellen läßt.

Die Aufstellung der Thetarelationen geschieht nun so, daß man Gleichungen mit unbestimmten Koeffizienten ansetzt und die Koeffizienten ermittelt, indem man die Argumente ω_h durch verschiedene halbe Periodensysteme $\frac{1}{2}A_h^r, \frac{1}{2}A_h^s, \ldots$ ersetzt, die zu den P. Ch. $(r), (s), \ldots$ gehören, wobei die Formeln (*St.* A. F. S. 213, Gl. 40, gebildet für $U_h = 0$) anzuwenden sind. Wir verzichten in den folgenden Relationen der Einfachheit halber auf die Angabe der Vorzeichen der einzelnen Glieder und deuten dieselben nur durch $\pm$ an. Zur Abkürzung setzen wir eine Thetafunktion $\vartheta_m((\omega)) = \Theta_m$ und wie früher $\vartheta_m((0)) = c_m$, so daß die zu ungerader T. Ch. gehörigen Werte $c_\varkappa$ und $c_{\varkappa\lambda}$ gleich Null sind.

---

*) *Weber*, A. F. S. 35—44. *Schottky*, A. F. S. 25, 38—43.

sehr allgemeine Formel

$$(3.)\qquad c_0 c_{pq}\,\Theta_{mp}\,\Theta_{mq} = \sum_{\alpha,\ldots\mu,0} \pm c_{\alpha m}\,c_{\alpha mpq}\,\Theta_{\alpha p}\,\Theta_{\alpha q}$$

und durch Vermehrung von ω_h **um** $\frac{1}{2}A_h^r$ **die weitere**

$$(3^a.)\qquad c_0 c_{pq}\,\Theta_{mpr}\,\Theta_{mqr} = \sum_{\alpha,\ldots\mu,0} \pm c_{\alpha m}\,c_{\alpha mpq}\,\Theta_{\alpha pr}\,\Theta_{\alpha qr}\,.$$

Indem man m, p, q **bestimmte Werte gibt, erhält man aus (3.) eine Reihe von speziellen, viergliedrigen Formeln; die Werte von** m, p, q **sind in Klammern beigefügt:**

$$(4.)\qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \pm c_{\alpha\lambda\mu}\,c_{\alpha\varkappa\lambda\mu}\,\Theta_{\alpha\lambda\mu}\,\Theta_{\alpha\varkappa\lambda\mu} = 0. \qquad (\lambda\mu,\lambda\mu,\varkappa\lambda\mu)$$

$$(5.)\qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \pm c_{\alpha\varkappa\lambda}\,c_{\alpha\varkappa\mu}\,\Theta_{\alpha\varkappa\lambda}\,\Theta_{\alpha\varkappa\mu} = 0. \qquad (\varkappa\lambda,\varkappa\lambda,\varkappa\mu)$$

$$(6.)\qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma,0} \pm c_{\alpha\delta\varkappa\lambda}\,c_{\alpha\delta\varkappa\mu}\,\Theta_{\alpha\delta\varkappa\lambda}\,\Theta_{\alpha\delta\varkappa\mu} = 0. \qquad (\delta\varkappa\lambda,\delta\varkappa\lambda,\delta\varkappa\mu)$$

$$(7.)\qquad c_0 c_{\varkappa\lambda\mu}\,\Theta_0\,\Theta_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \pm c_{\alpha\delta\varkappa}\,c_{\alpha\delta\lambda\mu}\,\Theta_{\alpha\delta\varkappa}\,\Theta_{\alpha\delta\lambda\mu}. \qquad (\delta\varkappa,\delta\varkappa,\alpha\beta\gamma\varkappa)$$

$$(8.)\qquad c_0 c_{\varkappa\lambda\mu}\,\Theta_0\,\Theta_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_{\varkappa,\lambda,0} \pm c_{\alpha\gamma\varkappa\mu}\,c_{\beta\delta\varkappa\mu}\,\Theta_{\alpha\gamma\varkappa\mu}\,\Theta_{\beta\delta\varkappa\mu}. \qquad (\alpha\gamma\mu,\alpha\gamma\mu,\beta\delta\mu)$$

$$(9.)\qquad c_0 c_{\varkappa\lambda\mu}\,\Theta_{\alpha\delta\mu}\,\Theta_{\beta\gamma\mu} = \sum_{\varkappa,\lambda,0} \pm c_{\alpha\gamma\varkappa\mu}\,c_{\beta\delta\varkappa\mu}\,\Theta_{\alpha\beta\varkappa}\,\Theta_{\gamma\delta\varkappa}. \qquad (\alpha\gamma\mu,\alpha\beta,\gamma\delta)$$

Aus diesen leitet man weitere Formeln ab, wie (3ᵃ.) aus (3.), z. B.

$$(5^a.)\qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \pm c_{\alpha\varkappa\lambda}\,c_{\alpha\varkappa\mu}\,\Theta_{\alpha}\,\Theta_{\alpha\lambda\mu} = 0. \qquad (r=\varkappa\lambda)$$

$$(6^a.)\qquad c_{\delta\varkappa\lambda}\,c_{\delta\varkappa\mu}\,\Theta_0\,\Theta_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \pm c_{\alpha\delta\varkappa\lambda}\,c_{\alpha\delta\varkappa\mu}\,\Theta_{\alpha}\,\Theta_{\alpha\lambda\mu}. \qquad (r=\delta\varkappa\lambda)$$

Es ergeben sich nun *algebraische Relationen,* **wenn man die allgemeinen Argumente** ω_h **durch die speziellen** $u_h = u_h^{x\xi}$ **und zugleich die ungeraden Thetafunktionen** $\vartheta_m((u))$ **nach (22.) § 9 durch** $\varepsilon\, l_m \sqrt{H_m \Pi'_m}$ **ersetzt; man kann ferner noch** $\xi = x$, $((u)) = 0$, $\vartheta_{\alpha\beta\gamma}((0)) = c_{\alpha\beta\gamma}$ **setzen. Wir führen nur diejenigen Formeln an, die im folgenden Paragraphen benutzt werden und fügen hier die Vorzeichen der Glieder hinzu.**

$$(10.)\qquad \textbf{Aus (5}^a\textbf{.):}\ \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\left[(-1)^{\varkappa\lambda\alpha|\alpha} c_{\alpha\varkappa\lambda}\,c_{\alpha\varkappa\mu}\,c_{\alpha\lambda\mu}\,l_\alpha H_\alpha\right] = 0.$$

$$(11.)\quad \textbf{Aus (6}^a\textbf{.):}\ c_0 c_{\delta\varkappa\lambda}\,c_{\delta\varkappa\mu}\,l_{\lambda\mu} H_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma}\left[(-1)^{\beta\gamma,\alpha} c_{\beta\gamma\lambda}\,c_{\beta\gamma\mu}\,c_{\alpha\lambda\mu}\,l_\alpha H_\alpha\right].$$

(12.) Aus (9.):

$$c_0 c_{\varkappa\lambda\mu}\,c_{\alpha\delta\mu}\,c_{\beta\gamma\mu} = (-1)^{\varkappa|\lambda+\alpha|\delta+\beta|\gamma}\left[c_{\alpha\beta\varkappa}\,c_{\gamma\delta\varkappa}\,c_{\alpha\gamma\lambda}\,c_{\beta\delta\lambda} - c_{\alpha\beta\lambda}\,c_{\gamma\delta\lambda}\,c_{\alpha\gamma\varkappa}\,c_{\beta\delta\varkappa}\right].$$

Setzt man die Größen $f_{\varkappa\lambda\mu}$ aus (6.) in (4.) ein, so folgt

$$(7^{a,b,c}.)\quad r^5 l l_\varkappa^4 l_\lambda^4 f_{\varkappa\lambda} = \frac{e^2 e_{\varkappa\lambda}^2}{e_\varkappa^2 e_\lambda^2}; \qquad r^{15} l^5 l_\varkappa^{10} f_\varkappa = \frac{e^3}{e_\varkappa^8}; \qquad r^{35} l^{15} f = e^4.$$

Da ferner, wie leicht zu sehen,

$$(7^d.)\qquad \frac{e e_{\varkappa\lambda} e_{\varkappa\mu} e_{\lambda\mu}}{e_\varkappa e_\lambda e_\mu e_{\varkappa\lambda\mu}} = e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta\delta} e_{\alpha\gamma\delta} e_{\beta\gamma\delta},$$

so folgt aus (6.)

$$(8.)\qquad e_{\varkappa\lambda u} = \frac{e e_{\varkappa\lambda} e_{\varkappa\mu} e_{\lambda\mu}}{r e_\varkappa e_\lambda e_\mu l_\varkappa l_\lambda l_\mu f_{\varkappa\lambda\mu}}.$$

2. Wir entnehmen aus § 11 die Gleichung (12.), nämlich

$$(9.)\quad - e_{\mu\varkappa\lambda} e_{\mu\alpha\delta} e_{\mu\beta\gamma} = (-1)^{\varkappa|\lambda+\alpha|\delta+\beta|\gamma} \left[e_{\varkappa\alpha\gamma} e_{\varkappa\beta\delta} e_{\lambda\alpha\beta} e_{\lambda\gamma\delta} - e_{\varkappa\alpha\beta} e_{\varkappa\gamma\delta} e_{\lambda\alpha\gamma} e_{\lambda\beta\delta}\right].$$

Nun ist nach (6.)

$$r l_\varkappa l_\alpha l_\beta f_{\varkappa\alpha\beta} = e_{\gamma\delta\lambda} e_{\gamma\delta\mu} e_{\gamma\lambda\mu} e_{\delta\lambda\mu},$$
$$r l_\varkappa l_\gamma l_\delta f_{\varkappa\gamma\delta} = e_{\alpha\beta\lambda} e_{\alpha\beta\mu} e_{\alpha\lambda\mu} e_{\beta\lambda\mu},$$
$$r l_\lambda l_\alpha l_\gamma f_{\lambda\alpha\gamma} = e_{\beta\delta\varkappa} e_{\beta\delta\mu} e_{\beta\varkappa\mu} e_{\delta\varkappa\mu},$$
$$r l_\lambda l_\beta l_\delta f_{\lambda\beta\delta} = e_{\alpha\gamma\varkappa} e_{\alpha\gamma\mu} e_{\alpha\varkappa\mu} e_{\gamma\varkappa\mu},$$

daher

$$r^4 l^2 f_{\varkappa\alpha\beta} f_{\varkappa\gamma\delta} f_{\lambda\alpha\gamma} f_{\lambda\beta\delta} = l_\mu^2 e_\mu \cdot \frac{e_{\varkappa\alpha\gamma} e_{\varkappa\beta\delta} e_{\lambda\alpha\beta} e_{\lambda\gamma\delta}}{e_{\mu\varkappa\lambda} e_{\mu\alpha\delta} e_{\mu\beta\gamma}},$$

$$r^4 l^2 f_{\varkappa\alpha\gamma} f_{\varkappa\beta\delta} f_{\lambda\alpha\beta} f_{\lambda\gamma\delta} = l_\mu^2 e_\mu \cdot \frac{e_{\varkappa\alpha\beta} e_{\varkappa\gamma\delta} e_{\lambda\alpha\gamma} e_{\lambda\beta\delta}}{e_{\mu\varkappa\lambda} e_{\mu\alpha\delta} e_{\mu\beta\gamma}}.$$

Hiernach nimmt die Gleichung (9.) die Form an

$$- e_\mu l_\mu^2 = r^4 l^2 (-1)^{\varkappa|\lambda+\alpha|\delta+\beta|\gamma} \left[f_{\varkappa\alpha\beta} f_{\varkappa\gamma\delta} f_{\lambda\alpha\gamma} f_{\lambda\beta\delta} - f_{\varkappa\alpha\gamma} f_{\varkappa\beta\delta} f_{\lambda\alpha\beta} f_{\lambda\gamma\delta}\right].$$

Die Vergleichung mit (15.) § 1 gibt

$$(10.)\qquad - e_\mu l_\mu^2 = r^4 l^2 g_\mu,$$

und wenn man für μ setzt $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa, \lambda, \mu$ und das Produkt bildet,

$$(11.)\qquad e^3 = r^{28} l^{12} g.$$

Nun erhält man aus (7ᶜ.) in Verbindung mit (11.) die Gleichungen

$$(12^{a,b}.)\qquad e = -\frac{f^4}{g^5}, \qquad r^7 l^3 = \frac{f^3}{g^4},$$

ferner aus (7[b].) in Verbindung mit (10.) und (12[b].)

(13[a, b].)
$$e_\varkappa^2 = \frac{f^3}{g^5} f_\varkappa g_\varkappa^5, \qquad l_\varkappa^4 = \frac{rlg}{f_\varkappa g_\varkappa^3},$$

und aus (7[b].) in Verbindung mit (10.) und (11.)

(14.)
$$e_{\varkappa\lambda}^2 = \frac{f g_\varkappa^2 g_\lambda^2 f_{\varkappa\lambda}}{g^2}.$$

Endlich ergibt sich $e_{\varkappa\lambda\mu}$. Nach (14.) ist

$$e_{\varkappa\lambda}^2 e_{\varkappa\mu}^2 e_{\lambda\mu}^2 = \frac{f^3}{g^6} g_\varkappa^4 g_\lambda^4 g_\mu^4 f_{\varkappa\lambda} f_{\varkappa\mu} f_{\lambda\mu}$$

und nach (10.) und (12[b].) ist

$$r^2 e_\varkappa e_\lambda e_\mu l_\varkappa^2 l_\lambda^2 l_\mu^2 = - r^{14} l^6 g_\varkappa g_\lambda g_\mu = - \frac{f^6}{g^8} g_\varkappa g_\lambda g_\mu.$$

Führt man hieraus den Wert von $r^2 l_\varkappa^2 l_\lambda^2 l_\mu^2$ ein in (8.), so folgt

$$e_{\varkappa\lambda\mu}^2 = - \frac{f^5}{g^8} \frac{g_\varkappa^3 g_\lambda^3 g_\mu^3 f_{\varkappa\lambda} f_{\varkappa\mu} f_{\lambda\mu}}{e_\varkappa e_\lambda e_\mu f_{\varkappa\lambda\mu}^2},$$

oder da nach (13[a].)

$$e_\varkappa^2 e_\lambda^2 e_\mu^2 = \frac{f^9}{g^{15}} f_\varkappa f_\lambda f_\mu g_\varkappa^5 g_\lambda^5 g_\mu^5,$$

schließlich

(15.)
$$e_{\varkappa\lambda\mu}^4 = \frac{f}{g} \frac{g_\varkappa g_\lambda g_\mu f_{\varkappa\lambda}^2 f_{\varkappa\mu}^2 f_{\lambda\mu}^2}{f_\varkappa f_\lambda f_\mu f_{\varkappa\lambda\mu}^4}.$$

Wir formen dies noch etwas um; ebenso wie (7[d].) hat man

$$\frac{f f_{\varkappa\lambda} f_{\varkappa\mu} f_{\lambda\mu}}{f_\varkappa f_\lambda f_\mu f_{\varkappa\lambda\mu}} = f_{\alpha\beta\gamma} f_{\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta\alpha} f_{\delta\alpha\beta}.$$

Daher geht (15.) über in

$$e_{\varkappa\lambda\mu}^4 = \frac{g_\varkappa g_\lambda g_\mu f_{\varkappa\lambda} f_{\varkappa\lambda} f_{\lambda\mu}}{g f_{\varkappa\lambda\mu}^3} f_{\alpha\beta\gamma} f_{\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta\alpha} f_{\delta\alpha\beta}.$$

Löst man $f_{\varkappa\lambda}, f_{\varkappa\mu}, f_{\lambda\mu}$ in ihre Faktoren auf, so erhält man mit Hilfe eines Proportionalitätsfaktors ϱ

(16[a].)
$$c_0^4 = \varrho \cdot g$$

und

(16[b].)
$$c_{\varkappa\lambda\mu}^4 = \varrho g_\varkappa g_\lambda g_\mu f_{\varkappa\lambda\alpha} f_{\varkappa\lambda\beta} f_{\varkappa\lambda\gamma} f_{\varkappa\lambda\delta} f_{\varkappa\mu\alpha} f_{\varkappa\mu\beta} f_{\varkappa\mu\gamma} f_{\varkappa\mu\delta} f_{\lambda\mu\alpha} f_{\lambda\mu\beta} f_{\lambda\mu\gamma} f_{\lambda\mu\delta} f_{\alpha\beta\gamma} f_{\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta\alpha} f_{\delta\alpha\beta},$$

d. h. abgesehen von dem Faktor ϱ stellen sich die vierten Potenzen der c_0 und $c_{\varkappa\lambda\mu}$ als ganze homogene Funktionen der sieben Wertsysteme $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha), \ldots (a_\mu, b_\mu, c_\mu)$ dar.

3. Es bleibt noch die Größe $l_{\varkappa\lambda}$ zu bestimmen. Die Vergleichung von (11.) § 11, nämlich

$$e_{\delta\mu\varkappa} e_{\delta\mu\lambda} l_{\varkappa\lambda} H_{\varkappa\lambda} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} [(-1)^{\beta\gamma|\alpha} e_{\beta\gamma\varkappa} e_{\beta\gamma\lambda} e_{\alpha\varkappa\lambda} l_\alpha H_\alpha]$$

mit (5.) § 3, nämlich

$$H_{\varkappa\lambda} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} [(-1)^{\beta\gamma|\alpha} g_\beta g_\gamma f_{\beta\gamma\delta} f_{\beta\gamma\mu} f_{\beta\varkappa\lambda} f_{\gamma\varkappa\lambda} H_\alpha]$$

gibt

$$l_{\varkappa\lambda} g_\beta g_\gamma f_{\beta\gamma\delta} f_{\beta\gamma\mu} f_{\beta\varkappa\lambda} f_{\gamma\varkappa\lambda} = \frac{e_{\beta\gamma\varkappa} e_{\beta\gamma\lambda} e_{\alpha\varkappa\lambda}}{e_{\delta\mu\varkappa} e_{\delta\mu\lambda}} l_\alpha$$

und, wenn man (13[b].) und (8.) benutzt

$$(17.) \qquad l_{\varkappa\lambda}^4 = \frac{rl}{fg^2} \frac{f_\varkappa f_\lambda g_\varkappa^2 g_\lambda^2}{f_{\varkappa\lambda}^2}.$$

Durch (16.) sind die Größen c_0 und $c_{\varkappa\lambda\mu}$, durch (17.) die Größen $l_{\varkappa\lambda}$ durch Proportionalitätsfaktoren und die Klassenmoduln dargestellt.

Die Theorie der Zahlstrahlen.

Von Herrn *Rudolf Fueter* aus Basel.

Einleitung.

Unter dem „Jugendtraum *Kroneckers*"*) versteht man das Theorem, daß man jede algebraische Gleichung, die im Rationalitätsbereich eines quadratischen imaginären Körpers eine *Abel*sche Gruppe hat, durch Einheitswurzeln und durch Wurzeln der Gleichungen der komplexen Multiplikation lösen kann. Die Gleichungen der komplexen Multiplikation sind dabei jene Gleichungen, denen die vollständige Invariante,**) die aus der Theorie der elliptischen Funktionen entspringende Modulfunktion, genügt, falls man nur ihr Argument die Zahlen der imaginären quadratischen Zahlkörper durchlaufen läßt.

Dieses Theorem beantwortet einen Spezialfall eines allgemeinen, gegen dessen Lösung die vorliegende Arbeit hinsteuert. Dieses läßt sich folgendermaßen formulieren: Gegeben ein *Galois*scher Körper k. Dann gibt es ein Funktionensystem, das die Wurzeln aller *Abel*schen Gleichungen im Rationalitätsbereich k liefert, falls nur das Argument jeder Funktion alle Zahlen eines bestimmten, zur Funktion gehörenden und in k enthaltenen Bereichs durchläuft.***)

---

*) Vergl. *Kronecker*: Bericht der königl. Akad. der Wiss. zu Berlin. 1877. S. 851. Festschrift zu *Kummers* Doktorjubiläum (*Crelle* Bd. 92). S. 67 ff. *Hilbert:* Über die Theorie der relativ-quadr. Zahlkörper. Jahresbericht der deutsch. math. Vereinig. Bd. VI. Math. Probleme. Göttinger Nachrichten der k. Ges. d. Wiss. 1900. S. 277. 12. Problem.

**) *Weber:* Ellipt. Funktionen. (1891.) S. 124.

***) Vergl. *Hilbert:* Mathemat. Probleme a. a. O. Dort wird besonders auch auf die große Bedeutung hingewiesen, die das Problem für die Funktionentheorie hat.

Der Reiz der Beantwortung dieser Frage liegt darin, daß daran Funktionentheorie, Algebra und Zahlentheorie gleichermaßen beteiligt sind.

Die *Funktionentheorie* liefert die *Existenzbeweise*. Wie schon in der elementaren Algebra der Beweis von der Existenz der Wurzel einer algebraischen Gleichung im Gebiete der komplexen Zahlen von der Funktionentheorie geliefert wird, so gibt sie uns hier die Existenz von algebraischen Gleichungen mit ausgezeichnetem Charakter, d. h. sie gibt uns zu gegebener Gruppe und Diskriminante in einem Körper k die zugehörige Gleichung. Wir werden auch sehen, daß sie uns in der Zahlentheorie die Existenz einer bestimmten möglichen Anzahl von Geschlechtern liefern wird, in die man ein gewisses System von Klassen von k einteilen wird.

Die *Algebra* gibt uns die *Gruppe* und damit den Begriff der Irreduzibilität. Die Gruppe liefert zugleich die Zerfällungsgesetze der Primzahlen, wie die grundlegende Arbeit *Hilberts**) gezeigt hat.

Die *Zahlentheorie* endlich gibt den Zusammenhang zwischen *Diskriminante* und Gruppe und damit das bindende Glied zwischen *Algebra* und Funktionentheorie. Ihr gelingt es schließlich, den Beweis der *Vollständigkeit* des durch die Funktionentheorie gelieferten Systems von Gleichungen zu geben.

Die vorliegende Arbeit ist rein *zahlentheoretisch*. Sie supponiert stets die Existenz von Gleichungen mit bestimmter Gruppe und bestimmter Diskriminante und entwickelt hieraus eine Theorie dieser Gleichungen. Diese Theorie wird so weit geführt, daß sie in dem Falle, wo Funktionentheorie und Algebra schon das Ihre getan haben, nämlich im *Falle der komplexen Multiplikation, ausreicht zum Beweise des Kroneckerschen Jugendtraumes.* Worin besteht nun diese Theorie? Die wesentlichen Züge derselben sind die folgenden:

Schon *Kronecker***) hatte die Vermutung ausgesprochen, daß die Relativdiskriminante des Klassenkörpers der komplexen Multiplikation in bezug auf den zugehörigen quadratischen Ring (bezw. Ordnung)***) nur die Primzahlen von dessen Diskriminante enthalten könne. Diese Aussage wird dahin präzisiert, daß *die Relativdiskriminante jener Körper nur die Primzahlen des Führers des zugehörigen Ringes enthalten könne.*

---

*) *Hilbert:* Theorie der algebr. Zahlkörper. Bericht der deutschen Math. Vereinigung. Bd. IV. Zweiter Teil: *Galois*scher Zahlkörper. S. 247 ff.

**) *Kronecker:* Bericht der königl. Ges. der Wiss. zu Berlin a. a. O.

***) Vergl. *Weber:* Ellipt. Funktionen. 14. Abschnitt. S. 423 ff.

chungen ist aber auch der Zerfällung der Primzahlen ein großes Interesse zu schenken. Und hier wieder ergeben die Klassen des Strahls die entscheidenden Gesichtspunkte. Die in der Relativdiskriminante aufgehenden Primzahlen unterliegen nämlich gewissen Kongruenzbedingungen, die im I. Teil der vorliegenden Arbeit auseinandergesetzt werden und dort eins der für den II. Teil wichtigsten Resultate ausmachen. Mit Hilfe derselben gelingt es, ein gewisses System von Klassen, das sogenannte *Relativstrahlklassensystem* in Geschlechter einzuteilen. Der Hauptsatz des II. Teils ist dann der Satz, daß nicht alle überhaupt möglichen Geschlechter existieren, sondern nur ein bestimmter Teil, genau wie in der elementaren Theorie des quadratischen Körpers. Daß dieser noch übrig bleibende Teil von Geschlechtern existieren muß, ist von der Funktionentheorie zu zeigen, ein Beweis, wie sie ihn im Falle der komplexen Multiplikation wirklich liefert. Es folgt dann, daß die Zerfällung der Primideale nur von der Klasse des Strahls abhängig ist, in der dieselben liegen.

Der Satz, daß aber nicht alle überhaupt möglichen Geschlechter existieren, ist in gewissem Sinne nichts anderes als das *Reziprozitätsgesetz*. Durch den Existenzbeweis *des Sternes* * wird also zugleich auch das allgemeinste Reziprozitätsgesetz gefunden.

Die soweit durchgeführte Theorie des Strahles, bezw. Sternes erlaubt dann, das zuerst genannte Problem zu lösen, falls das Funktionensystem so erforscht ist, wie es im Falle der komplexen Multiplikation ist. Zunächst erlaubt der Satz über die Geschlechter den Beweis, daß die Relativdiskriminante der Gleichungen der komplexen Multiplikation nur die Primzahlen des Führers des zugehörigen Strahles bezw. Ringes enthält. Denn wir kennen die Zerlegungsgesetze aus der Funktionentheorie. Andere Primzahlen in der Diskriminante als die des Führers würden aber ein Geschlecht geben, das nicht existieren darf, dessen unendlich viele Primideale des quadratischen Körpers also nicht zerfallen dürfen, was gegen das Zerlegungsgesetz wäre. *Damit ist dann aber die Existenz des Sternes bewiesen,* und die weitere Theorie des Strahles beweist, daß es auch nur *ein* solches System geben kann.

Da die Funktionentheorie erst in den beiden einfachsten Fällen die Funktionen geliefert hat, die unser erstes Problem erledigen, so schwebt unsere ganze Theorie in der Luft.*) Ich habe deshalb jeweils die Anwendung

*) Vergl. den Vortrag von *Blumenthal*, gehalten auf der Jahresversammlung der deutsch. Math. Vereinigung in Kassel 1903.

im Falle der komplexen Multiplikation angefügt, da dieselbe das interessanteste, bis jetzt bekannte Beispiel liefert.

Noch ein Wort über die Bezeichnungen und Begriffe. Ich habe den *Hilbertschen Zahlbericht**) als „standard work" betrachtet und mich ganz an die dortige Bezeichnung und Begriffsbildung gehalten. Auch meine Verweise gelten fast immer nur jenem Werk, da man ja dort leicht die weitere Literatur wird finden können.

Für den Leser habe ich zu besserem Verständnis an den Kopf jedes Kapitels das Hauptresultat desselben gesetzt.

I. Teil.

I. Kapitel. *Vereinfachung.*

Hauptsatz: Jede algebraische Gleichung, die in einem *Galois*schen Körper k vom Grade m als Rationalitätsbereich eine *Abel*sche Gruppe besitzt, läßt sich zurückführen auf ein System von Gleichungen mit folgenden Eigenschaften:

a) ihre Koeffizienten sind rationale Zahlen;

b) der Grad ist eine Primzahlpotenz;

c) die Gruppe der Gleichung ist in k eine *Abel*sche und ihre Basis besteht aus höchstens m Substitutionen, alle von demselben Grade.

Komplexe Multiplikation: Jede algebraische Gleichung, die in einem quadratischen Körper als Rationalitätsbereich eine *Abel*sche Gruppe besitzt, läßt sich auflösen durch eine Reihe von Gleichungen mit folgenden Eigenschaften:

a) die Koeffizienten der Gleichung sind rational;

b) der Grad ist eine Primzahlpotenz;

c) die Gruppe ist zyklisch in k.

1. Es sei

$$(1.)\qquad \Theta^n - \vartheta_1 \Theta^{n-1} + \vartheta_2 \Theta^{n-2} - \cdots - (-1)^n \vartheta_n = 0$$

eine algebraische Gleichung vom n-ten Grade, deren Koeffizienten Zahlen irgend eines algebraischen Körpers sind. Wir wollen im folgenden die

*) *Hilbert* a. a. O. Das schon anfangs zitierte Werk *Hilberts* im Bericht der deutsch. Math.-Vereinig. Bd. IV wird in der Folge stets kurz als „Zahlbericht" zitiert werden.

Theorie des Körpers (Θ) entwickeln in bezug auf einen Körper k, falls die Gruppe von (1.) in k als Rationalitätsbereich eine *Abel*sche ist. Wir betrachten somit das zahlentheoretische Verhältnis jedes algebraischen Körpers in bezug auf einen andern, wenn seine *Galois*sche Gruppe im letzteren eine *Abel*sche ist.

Wir zeigen zunächst, daß sich die Gleichung (1.) auf ein System von Gleichungen mit bestimmten Eigenschaften zurückführen läßt, so daß durch alleinige Behandlung einer Gleichung des Systems auch die Theorie von (1.) gegeben wird. Erst diese Gleichungen stehen in einem einfachen und durchsichtigen zahlentheoretischen Zusammenhang mit dem Körper k.

Zunächst können wir annehmen, die Gleichung (1.) habe eine zyklische Gruppe, da wir *Abel*sche Gleichungen immer auf solche zurückführen können. Ferner kann n immer zu einer Primzahlpotenz gemacht werden. Die zyklische Substitution von (1.) werde mit S bezeichnet.

2. Wir denken uns den Körper k als einen *Galois*schen. Durch Adjunktion seiner konjugierten erreichen wir dies immer. Sein Grad sei m, seine Substitutionen:

$$s_1 = 1,\ s_2, s_3, s_4, \dots s_m.$$

In diesem Körper hat (1.) eine zyklische Gruppe. Wir setzen fest, daß Θ eine den Körper (k, Θ) bestimmende Zahl sei. Die aus (1.) entspringenden m Gleichungen:

$$(1'.)\quad (s_i\Theta)^n - s_i\vartheta_1 (s_i\Theta)^{n-1} + s_i\vartheta_2 (s_i\Theta)^{n-2} - \dots - (-1)^n s_i\vartheta_n = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, \dots m)$$

sind ebenfalls relativ *Abel*sch zu k. Dabei bedeute $s_i\Theta$ irgendeine bestimmte der m Wurzeln von (1'.). Wir bilden die m elementar-symmetrischen Funktionen der Größen:

$$s_1\Theta = \Theta;\ s_2\Theta,\ s_3\Theta, \dots s_m\Theta.$$

Alle diese elementarsymmetrischen Funktionen ergeben zusammen mit k einen Rationalitätsbereich, in dem der ursprüngliche Körper (Θ, k) enthalten ist.

Denn da Θ eine den Körper (Θ, k) bestimmende Zahl ist, genügt sie einer irreduzibeln Gleichung vom $m \cdot n$-ten Grade. Wenn aber die m elementarsymmetrischen Funktionen einen Körper von niedrigerem als n-ten Grade bestimmten, so würde ja Θ einer Gleichung von niedrigerem als $n \cdot m$-ten Grade genügen. Also ist der Körper der elementarsymmetrischen Funk-

tionen *wenigstens vom Grade n.* Da seine Zahlen ferner gegenüber allen Substitutionen von k ungeändert bleiben, ist er prim zu k. Er gibt somit zusammen mit k einen Körper von *wenigstens* $n \cdot m$*-tem Grade.* Hieraus ergibt sich sofort, daß dieser Körper mit dem Körper $(k, s_1\Theta, s_2\Theta, \ldots s_m\Theta)$ identisch ist, der den ursprünglichen enthält.

3. Es sei e_i eine der obigen elementar-symmetrischen Funktionen. *Dann genügt e_i einer irreduzibeln Gleichung mit rationalen Zahlen als Koeffizienten, die in k eine Abelsche ist. Die Abelsche Gruppe besteht aus höchstens m zyklischen Substitutionen, deren Grade Teiler von n sind.*

Die erste Behauptung geht aus der Konstruktion sofort hervor. Die Beschaffenheit der Gruppe erkennt man folgendermaßen:

Es sei S_i die Substitution der Gleichung (1'.). Man erhält dann durch:

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \ldots S_m^{x_m} e_i \qquad \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots n$$

ein System von Zahlen, deren symmetrische Funktionen sicher in k liegen. Also muß die Gruppe von e_1 in bezug auf k sicher ein Teiler von der Gruppe:

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \ldots S_m^{x_m} \qquad \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots n$$

sein. Diese Gruppe ist aber *Abel*sch, somit jeder ihrer Teiler auch, wodurch die Behauptung erwiesen ist. Der Grad der Substitutionen S_i ist aber n; also ist auch die letzte Behauptung erwiesen.

4. Wir haben in den vorigen Abschnitten die Lösung der Gleichung (1.) auf die Lösung einer Reihe von Gleichungen

$$(2.) \qquad \Omega_n - \omega_1 \Omega^{n-1} + \cdots - (-1)^n \omega_n = 0$$

zurückgeführt, die sich folgender Eigenschaften erfreuen:

a) die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ sind rationale Zahlen;

b) der Grad n ist eine Primzahlpotenz;

c) die Gleichung ist relativ *Abel*sch in bezug auf k, und hat höchstens m von einander unabhängige Substitutionen.

Die Substitutionen dieser *Abel*schen Gruppe seien:

$$S_1, S_2, \ldots S_\varkappa \; (\varkappa \leqq m).$$

Der Körper (Ω, k) ist ein *Galois*scher. Seine sämtlichen Substitutionen sind gegeben durch

$$s_i^y S_1^{x_1} S_2^{x_2} \ldots S_\varkappa^{x_\varkappa} \qquad \begin{cases} y = 0, 1, \\ i = 1, 2, \ldots m, \\ \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\varkappa \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots n. \end{cases}$$

Somit ist stets:

$$s_i S = S' s_i,$$

wo S, S' irgendwelche Potenzprodukte $S_1^{x_1} S_2^{x_2} \ldots S_\varkappa^{x_\varkappa}$ sind. Aus dieser Gleichung folgt sofort:

$$s_i S_\xi^y = S'^y s_i.$$

Die Substitutionen S und S' müssen aber den gleichen Grad haben. Hieraus folgt, daß wir durch Bildung der symmetrischen Funktionen von Ω mit allen relativ konjugierten, deren Substitutionen gleich hohen Grad haben, schließlich zu Gleichungen gelangen, mit den Eigenschaften a) b) c) und überdies der Eigenschaft d), daß ihre sämtlichen Grundsubstitutionen den gleichen Grad haben.

5. Wenn $\varkappa$, die Anzahl der unabhängigen Substitutionen $S_1, S_2, \ldots$, größer oder gleich ist dem größten Exponenten einer der Substitutionen s_i, so läßt sich das Problem noch weiter vereinfachen. Man kann nämlich setzen, wenn s irgend eine der Substitutionen $s_1 s_2, \ldots s_m$ ist vom Grade u,

$$\begin{aligned} s S_1 &= S_2 s, \\ s S_2 &= S_3 s, \\ &\cdots\cdots \\ s S_u &= S_{u+1} s. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort:

$$s^u S_1 = S_{u+1} s^u$$

oder wegen $s^u = 1$,

$$S_1 = S_{u+1}.$$

Wir wollen aber diesen allgemeinen Fall nicht weiter verfolgen, sondern den Fall der komplexen Multiplikation noch näher ins Auge fassen.

In diesem Falle ist $m=2$, und nur eine Substitution s vorhanden:

$$s^2=1.$$

Nach (3.) hat man höchstens 2 unabhängige Substitutionen S_1 und S_2 vom Grade n. *Man kann jedoch in diesem Falle immer die Gleichung* (2.) *auf 2 Gleichungen mit zyklischen Gruppen in k zurückführen.*

Ist nämlich

$$sS_1=S_1^{x_1}s,$$

wo x_1 irgend eine ganze rationale Zahl ist, so wird der Körper der elementarsymmetrischen Funktionen von

$$\Omega,\; S_1\Omega_1\; S_1^2\Omega,\dots S_1^{n-1}\Omega$$

zyklisch in k sein, und da die symmetrischen Funktionen in bezug auf s invariant sind, wird der Körper auch wieder durch eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten gegeben sein.

Ist dagegen

$$sS_1=Ss$$

und S keine Potenz von S_1, so sei

a) *n prim zu* 2. Es wird, wegen $s^2=1$, die Beziehung existieren

$$sS=S_1s;$$

ferner ist S sicher vom Grade n. Wenn

$$S=S_1^{x_1}S_2^{x_2},$$

so dürfen deshalb nicht beide x_1 und x_2 einen Teiler mit n gemein haben. Wir betrachten die beiden Substitutionen

$$S'=S_1S \qquad \text{und} \qquad S''=S_1S^{-1}$$

oder

$$S'=S_1^{1+x_1}S_2^{x_2}; \qquad S''=S_1^{1-x_1}S_2^{-x_2}.$$

Ist x_2 zu n teilerfremd, so bilden S' und S'' wieder eine Basis der durch S_1 und S_2 gegebenen Gruppe. Denn es ist.

$$S_1=(S'S'')^a,$$
$$S_2=(S'S''^{-1})^{a'}S^{-2a'x_1}=S'^{a'-2aa'x_1}S''^{-a'-2a'ax_1},$$

wenn a und a' den in diesem Falle stets lösbaren Kongruenzen genügen:

$$2a \equiv 1(n); \qquad 2x_2 a' \equiv 1(n).$$

Ist dagegen x_2 zu n nicht teilerfremd, so muß x_1 diese letztere Eigenschaft besitzen, und es wird ebenso (da n ungerade ist) auch $(x_1 + 1)$ oder $x_1 - 1$ zu n teilerfremd sein. Je nachdem bilden S' und S_2 bezw. S'' und S_2 eine neue Basis.

Stets aber wird nun die neue Basis anders beschaffen sein als die alte, da

$$sS' = S's; \qquad sS'' = S''^{-1}s.$$

Wir haben das Problem also auf den zuerst betrachteten Fall zurückgeführt, daß S eine Potenz von S_1 sei.

b) n *eine Potenz von* 2. x_1 oder x_2 sind ungerade, wenn

$$S = S_1^{x_1} S_2^{x_2}.$$

Ist x_2 ungerade, so darf man S direkt als S_2 annehmen und hat

$$sS_1 = S_2 s,$$
$$sS_2 = S_1 s.$$

Wir haben den merkwürdigen Fall, daß die Substitution sS_1 eine Substitution $2n$-ten Grades ist. Denn es ist

$$(sS_1)^2 = sS_1 sS_1 = S_2 s^2 S_1 = S_1 S_2$$

und $S_1 S_2$ ist nach Annahme vom Grade n. Wir nehmen eine den Körper K bestimmende Zahl Ω und bilden die elementar-symmetrischen Funktionen von

$$\Omega,\ S_1 S_2 \Omega,\ (S_1 S_2)^2 \Omega, \ldots (S_1 S_2)^{n-1} \Omega$$

und von diesen bilden wir wieder die symmetrischen Funktionen mittels der Substitution s. Diese bleiben dann in bezug auf s und $S_1 S_2$ ungeändert (da $sS_1 S_2 = S_1 S_2 s$). Dagegen ändern sie sich für S_1 (bezw. S_2, was auf dasselbe hinauskommt, da für diese Zahlen $S_1 S_2 = 1$, also $S_1 = S_2^{-1}$ wird). Sie bestimmen einen Körper n-ten Grades mit den gewünschten Eigenschaften.

Nachher machen wir die gleiche Operation mit

$$\Omega,\ S_1 S_2^{-1} \Omega,\ (S_1 S_2^{-1})^2 \Omega, \ldots (S_1 S_2^{-1})^{n-1} \Omega.$$

Diese Werte genügen dann einer Gleichung vom n-ten Grade, deren Substitution $S_1 (= S_2)$ ist. Allein die beiden so konstruierten Körper n-ten

Grades haben den gleichen Unterkörper 2. Grades. Denn es ist für die Zahlen derselben

$$S_1^2 = S_2^2 = 1,$$

also

$$S_1 S_2 = S_1 S_2^{-1}.$$

Dagegen können die beiden Körper nicht mehr Körper gemein haben, da ja für den zuerst konstruierten Körper (wegen $S_1 = S_2^{-1}$):

$$s S_1 = S_1^{-1} s,$$

für den zweiten dagegen (wegen $S_1 = S_2$)

$$s S_1 = S_1 s,$$

welche Gleichungen nur übereinstimmen für die Zahlen des Körpers $S_1^2 = 1$. Um den noch fehlenden quadratischen Körper zu erlangen, bilden wir den zu k relativ biquadratischen Körper, mit den Substitutionen:

$$1,\ S_1,\ S_2,\ S_1 S_2.$$

Derselbe hat nur einen quadratischen Unterkörper mit den obigen Körpern gemein. Er gibt also mit ihnen zusammen den gewünschten Körper.

Dieser biquadratische Körper ist aber relativ zyklisch in bezug auf k. Denn er ist gegeben durch:

$$1,\ S = s S_1,\ S^2 = (S_1)^2 = S_1 S_2,\ S^3 = (s S_1)^3 = s S_2,$$

und es wird

$$s S = S_1 = S_1 s \cdot s = s S_2 \cdot s = S^3 \cdot s,$$

also haben wir durch lauter zyklische Relativgleichungen den genannten Körper erhalten.

Ist dagegen x_2 gerade, so ist x_1 ungerade, und $x_1 + 1$ oder $x_1 - 1$ nur durch 2 teilbar, nicht aber durch 4. Je nachdem nehme man $S_1 S$ oder $S_1 S^{-1}$ und bilde mit der betreffenden Substitution die relativkonjugierten von Ω. Ihre elementar-symmetrischen Funktionen genügen dann einer zyklischen Gleichung $2n$-ten Grades mit der Substitution

$$S = s S_2$$

in bezug auf k (denn es ist jetzt $S_1^2 = S_2^{2x}$, x eine bestimmte ganze rat. Zahl).

Wir haben somit in allen Fällen den **Satz:** *Jede algebraische Gleichung, die in einem quadratischen Körper als Rationalitätsbereich eine Abelsche Gruppe*

besitzt, läßt sich auflösen durch eine Reihe von Gleichungen mit folgenden Eigenschaften:

a) *die Koeffizienten der Gleichung sind rationale Zahlen;*

b) *der Grad n ist eine Primzahlpotenz;*

c) *die Gruppe ist zyklisch in k.*

Um deshalb unnötige Komplikation der Bezeichnung zu vermeiden, werden im folgenden auch für den Fall des allgemeinen Körpers k Gleichungen vom Typus des letzten Satzes behandelt werden. Wir setzen die Gruppe der Gleichungen also als zyklisch voraus. Es haben jedoch die zu entwickelnden Methoden ihre ganz gleiche Anwendung im allgemeinen Fall, der deshalb nicht im geringsten mehr Interesse erfordert als der, der allein genau entwickelt werden soll.

Kapitel II. *Der Zahlstrahl.*

Hauptsatz: Im Kongruenzstrahl ist die Anzahl der Strahlgrundeinheiten gleich der Anzahl der Grundeinheiten des Körpers. Die Strahlklassenanzahl h_s beträgt:

$$h_s = \varphi(\mathfrak{f}) \frac{w_s R}{w \cdot R_s} h,$$

wo $\mathfrak{f}$ der Führer des Strahles, h die Klassenanzahl des Körpers, R der Regulator des Körpers, R_s der des Strahles und w die Anzahl der Einheitswurzeln im Körper, w_s der im Strahl ist.

Definition: Ein System von Zahlen heißt ein Strahl, wenn das Produkt und der Quotient zweier Zahlen desselben wieder dem System angehört. Derselbe enthält somit stets die Einheit.*)

Der *Körper und der reguläre Ring***) sind Spezialfälle von Strahlen.

1. Wir betrachten speziell den Zahlstrahl, der aus den Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers zusammengesetzt ist. Eine Einheit des Körpers, die im Strahl liegt, heißt *Strahleinheit.* Alle Strahleinheiten lassen sich durch r *Strahlgrundeinheiten* darstellen:

$$\varepsilon H_1^{x_1} H_2^{x_2} \ldots . H_r^{x_r},$$

---

*) Der Begriff Strahl ist zuerst (aber etwas abweichend) in meiner Dissertation (Göttingen, 1903) Anm. 4 S. 5 eingeführt. Seither wurde er auch gebraucht von *Lietzmann*, Zur Theorie der n-ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern. Math. Annal. Bd. 60, S. 263.

**) Die Zahlen eines Ringes, die zum Führer prim sind, sowie deren Quotienten.

wo $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend welche ganze rationale Zahlen und ε eine der Einheitswurzeln des Strahles sind.

Diesen Satz beweist man sofort mit Hilfe der im Körper existierenden Grundeinheiten.*)

2. Alle Zahlen eines Körperideals, die im Strahl liegen, bilden ein System $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ des Strahles von der Art, daß jedes Produkt zweier Zahlen des Systems, multipliziert mit einer beliebigen ganzen Zahl des Strahls, wieder dem System angehört. Dies System heißt *Strahlideal* γ_s:

$$\gamma_s = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Ein Strahlideal, das alle und nur diejenigen Zahlen $\lambda \cdot \alpha$ enthält, wo λ jede und α eine bestimmte ganze Zahl des Strahles bedeutet, heißt *Hauptstrahlideal* (α).

Das Produkt zweier Strahlideale ist das Strahlideal, gebildet aus allen Produkten einer Zahl des einen und einer Zahl des andern Strahlideals. Zu jedem Strahlideal $\mathfrak{a}$ gibt es ein Strahlideal $\mathfrak{b}$, so daß das Produkt ein Hauptstrahlideal wird:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (\omega),$$

wo ω eine Zahl des Strahles ist. Denn fassen wir $\mathfrak{a}$ einen Augenblick als Körperideal auf, so gibt es ein Körperideal $\mathfrak{b}$, so daß

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (\omega)$$

wird. Nun kann man aber ω immer als Zahl des Strahles auffassen. Wir wählen hierzu einfach eine der Strahlzahlen aus $\mathfrak{a}$. Nehmen wir nun in $\mathfrak{b}$ nur diejenigen Zahlen, die zugleich im Strahl liegen, so ergibt dies System das gewünschte Strahlideal. Aus diesem Resultat kann man leicht interessante Schlüsse ziehen, gemäß der einfachen Theorie der Ideale.**)

3. Zwei Strahlideale heißen äquivalent, wenn ihr Quotient eine Zahl des Strahles ist; man schreibt:

$$\frac{\mathfrak{a}_s}{\mathfrak{b}_s} \cong 1,$$

wobei das Kongruenzzeichen angenehm ist, um die Strahlenäquivalenz

*) Zahlbericht S. 214, Satz 47.

**) Zahlbericht § 5, S. 184 u. ff.

hervorzuheben. Das Kongruenzzeichen wurde gewählt, weil das wichtigste Beispiel von Strahlen die Kongruenzklasse nach einem Ideal ist (s. unten).

Alle äquivalenten Strahlideale bilden eine *Strahlklasse,* die Anzahl der Strahlklassen die *Strahlklassenanzahl.*

4. Von besonderem Interesse ist der *Kongruenzstrahl,* d. h. der Strahl, dessen Zahlen alle einer Zahl nach einem Modul kongruent sind. Diese Zahl muß immer die Einheit sein, da ja der Quotient zweier Zahlen ebenfalls im Strahl liegen soll. Es sei f der Modul. Derselbe wird *der Führer des Strahles* genannt. Alle Zahlen Ω des Strahles erfüllen also die Bedingung:

$$\Omega \equiv 1 \quad (f);$$

f ist hier ein Körperideal.

In diesem Strahl ist *die Anzahl der Grundeinheiten gleich der Anzahl der Grundeinheiten des Körpers. Ist h die Klassenanzahl des Körpers, so ist*

$$\varphi(f)\cdot\frac{w_s\cdot R}{w\cdot R_s}\cdot h$$

*die Klassenanzahl des Strahles; dabei ist R der Regulator des Körpers, R_s der des Strahles, w die Anzahl der Einheitswurzeln des Körpers, w_s der des Strahles, $\varphi(f)$ die bekannte φ-Funktion.**)

Um das letztere einzusehen, machen wir folgende Schlüsse:

a) Zu jeder Zahl ω des Körpers kann man eine zu ω prime Zahl ω_1 finden, so daß $\omega\cdot\omega_1$ im Strahl liegt, falls nur ω zum Führer des Strahles prim ist.

b) Jedem Körperideal entspricht ein Strahlideal und umgekehrt. Denn jedes Ideal läßt sich durch 2 Zahlen geben.**) Gemäß a) mache man dieselben zu Strahlzahlen, wodurch die Behauptung erwiesen ist.

Die Klassenanzahl des Strahles ist also ein Vielfaches von h. Dieses Vielfache findet man, indem man die Anzahl der Strahlklassen untersucht, die durch die Körperzahlen gegeben sind.

Die Strahlklassenanzahl ist endlich.

---

*) Zahlbericht S. 192.

**) Zahlbericht Satz 12, S. 186.

S sei die Substitution von (1.) in k. Dann nehmen wir weiter an, die Koeffizienten $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ seien rationale Zahlen.

Wir bezeichnen den Körper (k, Θ) mit K und seine Zahlen mit großen griechischen Buchstaben; die Zahlen von k mit kleinen griechischen Buchstaben; die Ideale von K mit großen deutschen, diejenigen von k mit kleinen deutschen Buchstaben.

Nach Annahme ist

$$S^n = 1, \quad S^x \neq 1, \quad \text{falls} \quad x \not\equiv 0 \quad (n).$$

1. Wie sofort ersichtlich, ist K wieder ein *Galois*scher Körper. Seine sämtlichen Substitutionen sind gegeben durch

$$S^x = S^x s_1, \; S^x s_2, \ldots S^x s_m,$$

wenn man x alle Werte von 0 bis $n-1$ durchlaufen läßt. Wir wollen unter s eine der Substitutionen $s_1, s_2, .. s_m$ verstehen und Größen im Zusammenhang mit s ohne Index bezeichnen. Wenn dann s mit einem s_i identifiziert wird, so hat man nur auch jenen Größen den Index i zu geben. sS muß sich so ausdrücken:

$$sS = S^x s_y.$$

Zunächst sieht man, wenn man die Gleichung auf irgend eine Zahl α von k anwendet, daß

$$s = s_y,$$

also

$$s S = S^x s, \qquad S = s^{-1} S^x s.$$

Nun ist aber

$$(s^{-1} S^x s)^y = s^{-1} S^{x \cdot y} s,$$

also wird

$$S = s^{-1}(s^{-1} S^x s)^x s = s^{-2} S^{x^2} s^2 = \cdots = s^{-u} S^{x^u} s^u.$$

Es sei u die niedrigste Zahl, für die

$$s^u = 1$$

wird. Dann ergibt letztere Beziehung

$$S^{x^u} = S$$

oder

$$x^u \equiv 1 \quad (n). \tag{3.}$$

Ist daher u zu $\varphi(n)=l^{r-1}(l-1)$ prim, so muß stets $x\equiv 1(n)$ und somit

$$sS=Ss$$

sein.

Die Kongruenz (3.) ergibt auch noch die Umkehrung:

$$Ss=sS^{x^{u-1}}. \tag{4.}$$

Wir setzen nun

$$x=1+l^a v,$$

wo v zu l prim sei. Es folgt dann sofort aus (3.), falls $a>0$,

$$u\equiv 0 \quad (l),$$

und für den Unterkörper von K, der relativ-zyklisch zu k vom Relativgrade l^a ist, findet man die Relation erfüllt:

$$sS=Ss.$$

Man sieht somit, daß dieser Körper in bezug auf die Substitution s ein *Abel*scher ist.

In dem Falle der komplexen Multiplikation weiß man, daß durch Adjunktion irgendwelcher *Abel*scher Größen, d. h. Einheitswurzeln, keine weitere Zerfällung eintritt, als man schon durch Adjunktion von Quadratwurzeln erhält.*) Ferner ist dort nur eine Substitution s vorhanden und

$$s^2=1 \quad \text{also} \quad u=2.$$

Für x ergeben sich die Wurzeln: bei ungeradem l und $l^r=2,4$

$$x\equiv \pm 1 \quad (n).$$

Da der Fall $x\equiv 1\,(n)$ auf Kreiskörper führt, was dem Obigen widerspricht, so muß

$$x\equiv -1 \quad (n)$$

und

$$sS=S^{-1}s \tag{2'.}$$

sein. $(x-1)$ ist dann stets zu l prim und $a=0$. Bei $l=2$, $r>2$

$$x\equiv \pm 1, \quad \pm 1 \pm \frac{n}{2}.$$

---

*) *Weber:* Über Zahlgruppen in algebraischen Körpern. Mathemat. Annalen. Bd. 49, S. 39.

Die Fälle $x \equiv 1,\ 1+\frac{n}{2}$ sind wieder auszuschließen, da sie auf Kreiskörper führen. Also bleibt auch hier nur

$$x \equiv -1, \quad -1+\frac{n}{2}.$$

In beiden Fällen ist $(x-1)$ durch 2 und durch keine höhere Potenz von 2 teilbar.

2. *Die Relativdifferente* $\mathfrak{D}_K$ *von* K *in bezug auf* k.

Man findet für $\mathfrak{D}_K$ leicht den Ausdruck:*)

$$\mathfrak{D}_K = \{(\Omega_1 - S\Omega_1, \Omega_2 - S\Omega_2, \ldots)^{l^{r-1}}$$
$$(\Omega_1 - S^l\Omega_1, \Omega_2 - S^l\Omega_2, \ldots)^{l^{r-2}} \ldots (\Omega_1 - S^{l^{r-1}}\Omega_1, \Omega_2 - S^{l^{r-1}}\Omega_2, \ldots)\}^{l-1},$$

wo $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ alle ganzen Zahlen von K sind. Denn jedes Element**) $\mathfrak{E}_i$ ist gleich dem Element $\mathfrak{E}_k$, wenn i und k durch die gleiche Potenz von l teilbar sind.

Es sei p *eine von* l *verschiedene* Primzahl, $\mathfrak{p}$ ein in p aufgehendes Primideal von k, $\mathfrak{P}_1$ ein in $\mathfrak{p}$ enthaltenes Primideal von K.

Wenn $\mathfrak{P}_1$ in der Relativdifferente enthalten ist, so muß es ein r_1 geben, so daß für eine bestimmte Zahl Ω^* die Inkongruenz besteht:

$$\Omega^* \not\equiv S^{l^{r_1-1}}\Omega^* \quad (\mathfrak{P}_1),$$

daß aber für alle Zahlen Ω von K die Kongruenz besteht:

$$\Omega \equiv S^{l^{r_1}}\Omega \quad (\mathfrak{P}_1), \tag{6.}$$

(wenn $r_1 = r$ ist, so findet selbstverständlich keine Inkongruenz statt). Wir setzen $n_1 = l^{r_1}$, $n_2 = l^{r-r_1} = l^{r_2}$, so daß

$$n_1 n_2 = n; \qquad r_1 + r_2 = r. \tag{7.}$$

Damit also $\mathfrak{P}_1$ wirklich in der Relativdifferente aufgeht, muß die Ungleichheit bestehen:

$$0 \leqq r_1 < r. \tag{8.}$$

Da (6.) für alle ganzen Zahlen Ω gilt, so gilt sie auch für $S^{n-1}\Omega$:

$$S^{n-1}\Omega \equiv S^{n_1+n-1}\Omega \quad (\mathfrak{P}_1),$$

*) Zahlbericht, S. 205.

**) Zahlbericht S. 205, vergl. auch Satz 68, S. 249.

woraus sofort

$$\Omega \equiv S^{n_1}\Omega \quad (S\mathfrak{P}_1)$$

folgt, d. h. aber: *Wenn $\mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{D}_K$ aufgeht, so gehen auch alle seine relativkonjugierten Ideale in $\mathfrak{D}_K$ auf.* Wir setzen $\mathfrak{P}_1^*$ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $\mathfrak{P}_1, S\mathfrak{P}_1, S^2\mathfrak{P}_1, \ldots,$ sodaß also $\mathfrak{P}_1^*$ durch kein Quadrat eines Primideals teilbar ist und

$$\text{(9.)} \qquad \begin{cases} S\mathfrak{P}_1^* = \mathfrak{P}_1^*, \\ \Omega \equiv S^{n_1}\Omega \quad (\mathfrak{P}_1^*) \end{cases}$$

für alle ganzen Zahlen Ω von K.

Ist ferner y irgend eine ganze rationale Zahl, so ergibt des weiteren die Kongruenz (9.):

$$\Omega \equiv S^{yn_1}\Omega \quad (\mathfrak{P}_1^*).$$

Da dieselbe für alle ganzen Zahlen Ω gilt, so gilt sie auch, wenn man für Ω die ganze Zahl $s^{u-1}\Omega$ setzt oder (bei Berücksichtigung von (2.) und (4.):

$$s^{u-1}\Omega \equiv S^{yn_1}s^{u-1}\Omega \equiv s^{u-1}S^{xyn_1}\Omega \quad (\mathfrak{P}_1^*).$$

Bestimmen wir, was immer möglich ist, y so, daß

$$xy \equiv 1 \quad (n)$$

wird, so folgt

$$s^{u-1}\Omega \equiv s^{u-1}S^{n_1}\Omega \quad (\mathfrak{P}_1^*)$$

oder:

$$\Omega \equiv S^{n_1}\Omega \quad (s\mathfrak{P}_1^*),$$

gültig für jede ganze Zahl Ω von K.

Es ist somit auch $s\mathfrak{P}_1^*$ in der Relativdiskriminante enthalten, und wir setzen nun $\mathfrak{P}$ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $s_1\mathfrak{P}_1^*$, $s_2\mathfrak{P}_1^*, \ldots s_m\mathfrak{P}_1^*$. Es gelten dann für $\mathfrak{P}$ die Beziehungen:

$$\text{(10.)} \qquad \begin{cases} \Omega \equiv S^{n_1}\Omega \ (\mathfrak{P}) \text{ für jede ganze Zahl } \Omega \text{ von } K, \\ S\mathfrak{P} = \mathfrak{P}, \\ s\mathfrak{P} = \mathfrak{P} \text{ für jede Substitution } s. \end{cases}$$

3. *Das in $\mathfrak{D}_k$ enthaltene Ideal $\mathfrak{P}$.*

Man kann sich den Relativkörper K aufgebaut denken aus r Relativkörpern $K_1, K_2, \ldots K_r = K$, wo immer K_i relativ-zyklisch vom Relativgrade l

in bezug auf K_{i-1} ist. Es sei $\mathfrak{D}_i$ die Relativdifferente von K_i in bezug auf K_{i-1}. Dann folgt aus einem Satze*) sofort, wenn $\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}, \ldots$ alle Zahlen des Körpers K_i bedeuten:

$$(11.)\quad \begin{cases} \mathfrak{D}_i = \left(\omega_1^{(i)} - S^{l^{i-1}}_{\omega_1^{(i)}},\ \omega_2^{(i)} - S^{l^{i-1}}_{\omega_2^{(i)}}, \ldots\right)^{l-1} \\ \qquad = \left(\Omega_1 - S^{l^{i-1}}\Omega_1, \Omega_2 - S^{l^{i-1}}\Omega_2, \ldots\right)^{l^{r-i}(l-1)}. \end{cases}$$

Vergleicht man (11.) mit dem in 2. gegebenen Ausdruck für $\mathfrak{D}_K$ und den dortigen Festsetzungen, so erhellt, daß

$$\mathfrak{D}_1,\ \mathfrak{D}_2, \ldots \mathfrak{D}_{r_1}$$

zu $\mathfrak{P}$ prim sind,

$$\mathfrak{D}_{r_1+1},\ \mathfrak{D}_{r_1+2}, \ldots \mathfrak{D}_r$$

einzeln durch $\mathfrak{P}$ teilbar sind.

Es ergibt sich für die Zerfällung jedes in p enthaltenen Primideals $\mathfrak{p}$ von k folgende Regel:

Durch Adjunktion von K_i zu K_{i-1} zerfällt jedes in p enthaltene Primideal von K_{i-1} nicht weiter oder in l von einander verschiedene Primideale, falls

$$i \leqq r_1.$$

Für $i > r_1$ wird dagegen *jedes* (vergl. Abschnitt 2.) solche Primideal die l-te Potenz eines Primideals von K_i.**)

Die n_2-te $= l^{r-r_1} = l^{r_2}$-te Potenz eines jeden in p enthaltenen Primideals von K wird somit Primideal in K_{r_1}. Hier tritt die wichtige Scheidung auf; p ist jetzt prim zur Relativdifferente von K_{r_1} in bezug auf k; in $\mathfrak{p}$ gehen also nur von einander verschiedene Primideale von K_{r_1} auf.

Aus dieser Überlegung folgt

$$(12.)\qquad \mathfrak{P}^{n_2} = \mathfrak{P}^{l^{r-r_1}} = \mathfrak{P}^{\frac{n}{n_1}} = (p).$$

4. Es sei $\mathfrak{P}'$ irgend ein Teiler von $\mathfrak{P}$, der invariant in bezug auf die Substitution S ist ($\mathfrak{P}' = S\mathfrak{P}'$). Aus dem Abschnitt 3. folgt, daß $\mathfrak{P}'$ die gleiche absolute Norm hat im Körper K, wie das Ideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}'^{n_2}$ des Körpers K_{r_1} in diesem Körper. Somit ist jede Zahl von K einer Zahl des Körpers K_{r_1} nach $\mathfrak{P}$ kongruent.

---

*) *Zahlbericht:* S. 40, Satz 208.

**) *Zahlbericht:* S. 277, Satz 93.

Wenden wir dieses Resultat auf eine ganze Zahl Ω von folgender Eigenschaft an: $\mathfrak{P}'$ gehe in Ω zur m-ten Potenz auf. Dagegen sei das Ideal $\left(\frac{\Omega}{\mathfrak{P}'^m}\right)$ zu $\mathfrak{P}'$ relativ prim.

Wir werden im folgenden ausgiebigen Gebrauch von der *Kronecker*-schen symbolischen Potenz*) machen. Die Größe Ω^{1-S} ist der Voraussetzung wegen einer ganzen Zahl nach $\mathfrak{P}'$ kongruent; es darf mit ihr wie mit ganzen Zahlen in Kongruenzen mit dem Modul $\mathfrak{P}'$ gerechnet werden. Denn das Ideal $\mathfrak{P}'$ ist invariant in bezug auf S. Also enthalten Zähler und Nenner von $\frac{\Omega}{S\Omega}$ die gleiche Potenz von $\mathfrak{P}'$. Da aber nach Annahme die übrigen Ideale des Zählers und Nenners zu $\mathfrak{P}'$ prim sind, so sieht man, daß man Ω^{1-S} so mit einer zu p primen ganzen Zahl multiplizieren kann, daß es eine ganze, zu $\mathfrak{P}'$ prime Zahl wird, woraus leicht die obige Behauptung folgt.

Nach obigem ist Ω^{1-S} einer Zahl $\omega^{(r_1)}$ von K_{r_1} nach $\mathfrak{P}'$ kongruent:

$$\Omega^{1-S} \equiv \omega^{(r_1)} \quad (\mathfrak{P}').$$

Da $\omega^{(r_1)}$ in K_{r_1} liegt, ist

$$\omega^{(r_1)} = S^{n_1}\,\omega^{(r_1)}$$

und

$$\omega^{(r_1)\,(1+S+\cdots+S^{n_1-1})}$$

ist eine Zahl in k. Somit wird

$$\Omega^{1-S^{n_1}} = \Omega^{1-S} \cdot \Omega^{S-S^2} \ldots \Omega^{S^{n_1-1}-S^{n_1}} \equiv \omega^{(r_1)\,(1+S+\cdots+S^{n_1-1})} \equiv \omega \quad (\mathfrak{P}'),$$

$$\omega \text{ eine Zahl in } k,$$

d. h. *die* $(1-S^{n_1})$-*te symbolische Potenz einer Zahl* Ω *mit der oben festgesetzten Eigenschaft ist einer Zahl* ω *von* k *nach* $\mathfrak{P}'$ *kongruent.*

5. *Die Zahl* $\Pi^{1-S^{n_1}}$.

Es sei Π eine ganze Zahl von K, in der unser $\mathfrak{P}'$ von Abschnitt 4 enthalten ist, jedoch so, daß $\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{P}'}\right)$ zu $\mathfrak{P}'$ prim sei. Π fällt also unter die Rubrik der Ω von 4. Es sei ferner K_i einer der Körper $K_{r_1}, K_{r_1+1}, \ldots K_{r-1}$, also

$$r_1 \leqq i < r. \tag{13.}$$

Wir setzen $m_1 = l^i$; $m_1 \cdot m_2 = n$.

*) Zahlbericht S. 271 u. ff.

Dann genügt Π in bezug auf K_i einer Relativgleichung m_2-ten Grades:

$$(14.)\qquad \Pi^{m_2} - \pi_1^{(i)}\Pi^{m_2-1} + \pi_2^{(i)}\Pi^{m_2-2} - \cdots - (-1)^{m_2}\pi_{m_2}^{(i)} = 0,$$

wo $\pi_1^{(i)}, \pi_2^{(i)}, \ldots \pi_m^{(i)}$ Zahlen von K_i sind und dementsprechend den Bedingungen unterliegen

$$\pi_1^{(i)} = S^{m_1}\pi_1^{(i)};\quad \pi_2^{(i)} = S^{m_1}\pi_2^{(i)};\cdots \pi_{m_2}^{(i)} = S^{m_1}\pi_{m_2}^{(i)}.$$

Wegen der Bedingung (13.) kommt $\mathfrak{P}'$ in jeder der Relativdifferenten $\mathfrak{D}_i$ von K_i bis $K_r = K$ vor. Somit ist

$$\Pi \equiv S^{m_1}\Pi \quad (\mathfrak{P}').$$

Nun sind aber die $\pi^{(i)}$ die elementar-symmetrischen Funktionen der Größen Π, $S^{m_1}\Pi$, $S^{2m_1}\Pi, \cdots S^{(m_2-1)m_1}\Pi$; somit wird

$$\pi_k^{(i)} \equiv w\,\Pi^k \equiv 0 \quad (\mathfrak{P}')$$

(w eine ganze rationale Zahl).

Da aber $\pi_k^{(i)}$ eine Zahl in K_i ist, muß auch sein

$$(15.)\qquad \pi_k^{(i)} \equiv 0 \quad (\mathfrak{P}'^{m_2}).$$

Da des weiteren die Größe $\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{P}'}\right)$ zu $\mathfrak{P}'$ prim sein soll, muß $\pi_{m_2}^{(i)}$ durch $\mathfrak{P}^{m_2}$ teilbar sein; allein es muß

$$(16.)\qquad \frac{\pi_{m_2}^{(i)}}{\mathfrak{P}'^{m_2}} \text{ zu } \mathfrak{P}' \text{ prim sein.}$$

Wir wollen die Diskriminante Δ von (14.) untersuchen. Dieselbe stellt sich folgendermaßen dar:*)

$$\Delta = (-1)^{\frac{m_2(m_2-1)}{2}} \prod_{0}^{m_2-1}{}_v \Big\{ m_2 (S^{vm_1}\Pi)^{m_2-1} - (m_2-1)\pi_1^{(i)}(S^{vm_1}\Pi)^{m_2-2} + \cdots + (-1)^{m_2-1}\pi_{m_2-1}^{(i)} \Big\}.$$

Wegen (15.) finden wir, da $\prod_{0}^{m_2-1}{}_v (S^{vm_1}\Pi) = \pi_{m_2}^{(i)}$:

$$\Delta \equiv (-1)^{\frac{m_2(m_2-1)}{2}} m_2^{m_2} \cdot \pi_{m_2}^{(i)\,m_2-1} \left(\mathfrak{P}'^{m_2(m_2-1)+1}\right)$$

oder da links und rechts in der Kongruenz Größen von K_i stehen:

$$\Delta \equiv (-1)^{\frac{m_2(m_2-1)}{2}} m_2^{m_2} \pi_{m_2}^{(i)\,m_2-1} (\mathfrak{P}'^{m_2^2}).$$

*) *Weber:* Algebra Bd. I, S. 169, Gleich. (5).

Vergleichen wir diese Kongruenz mit dem Resultat (16.) und bedenken, daß p von l verschieden, also zu m_2 prim ist, so folgt

$$(17.) \qquad \Delta \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{P}'^{m_2^2}),$$

und diese Inkongruenz gilt auch für jedes in $\mathfrak{P}'$ enthaltene Primideal.

Wäre nun für irgend ein in $\mathfrak{P}'$ enthaltenes Primideal $\mathfrak{P}_1$ die Kongruenz erfüllt:

$$\Pi^{1-S^{m_1}} \equiv 1 \ (\mathfrak{P}_1) \quad \text{oder} \quad \Pi \equiv S^{m_1} \Pi \ (\mathfrak{P}_1^2),$$

so folgt aus der Definition der Diskriminante

$$\Delta = \prod_{0}^{m_2-1}{}_{v,w}(S^{vm_1}\Pi - S^{wm_1}\Pi)$$

sofort

$$\Delta \equiv 0 \ (\mathfrak{P}_1^{2m_2(m_2-1)}).$$

Ein Vergleich mit (17.) ergibt die Ungleichheit:

$$2m_2(m_2-1) < m_2^2$$

oder

$$m_2 < 2, \quad m_2 = 1, \quad m_1 = n,$$

somit

$$i = r.$$

Diese Beziehung widerspricht der Annahme (12.). *Dieser Widerspruch beweist die Hinfälligkeit der Annahme, daß $\Pi^{1-S^{m_1}}$ nach irgend einem in $\mathfrak{P}'$ enthaltenen $\mathfrak{P}_1$ kongruent 1 sein könne.*

Wir erhalten zwei Resultate:

a) *Die Zahl $\Pi^{1-S^{m_1}}$ ist nach keinem in $\mathfrak{P}'$ enthaltenen Primideal von K kongruent* 1:

$$\Pi^{1-S^{m_1}} \not\equiv 1 \ (\mathfrak{P}')$$

falls nur

$$n_1 \leqq m_1 < n$$

ferner:

b) *Die Relativdifferente $\mathfrak{D}_k$ ist durch $\mathfrak{P}^{n_1-1}$ teilbar und $\left(\frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{P}^{n_1-1}}\right)$ ist zu $\mathfrak{P}$ prim.*

Dies letztere ergibt sich in dem Falle $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$.

6. *Der Klassenstrahl.*

Es sei wieder $\mathfrak{P}'$ irgend ein Teiler von $\mathfrak{P}$, invariant in bezug auf S. Wir bilden den Kongruenzstrahl*) mit dem Führer $\mathfrak{P}'$. Alle seine Zahlen Ω erfüllen die Bedingung

$$\Omega \equiv 1 \ (\mathfrak{P}').$$

Es sei speziell $\mathfrak{P}'$ *ein solcher Teiler von* $\mathfrak{P}$, *daß*

$$\mathfrak{P}'^{n_2} = \mathfrak{p}$$

Primideal in k *wird.* Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal f-ten Grades von k, so liegt die

$$\varphi(f) = (p^f - 1)\text{-te}$$

Potenz jeder zu p primen Zahl von K sicher im Strahl.**)

Es sei wieder Π eine durch $\mathfrak{P}'$ teilbare Zahl, $\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{P}'}\right)$ zu $\mathfrak{P}'$ prim. Dann ist $\Pi^{1-S^{n_1}}$ einer Zahl α von k nach $\mathfrak{P}'$ kongruent:

$$\Pi^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha \ (\mathfrak{P}').$$

α^{n_2} *ist die kleinste Potenz von* α, *die im Strahl mit dem Führer* $\mathfrak{P}'$ *liegt.*

Denn da α in k liegt, wird

$$\Pi^{1-S^{Gn_1}} \equiv \alpha^G \ (\mathfrak{P}').$$

Es sei g die kleinste Zahl, für die

$$\alpha^g \equiv 1 \ (\mathfrak{P}'),$$

also auch

$$\Pi^{1-S^{n_1 g}} \equiv 1 \ (\mathfrak{P}').$$

Wegen 5. a) muß dann sein

$$g \geqq n_2.$$

Andererseits ist aber $S^{n_1 n_2} = 1$, also von selbst

$$\alpha^{n_2} \equiv \Pi^{1-S^{n_1 n_2}} \equiv 1 \ (\mathfrak{P}').$$

Somit ist n_2 wirklich der kleinste Exponent, der α in den Strahl bringt, wie zu beweisen war.

---

*) Vergl. Kap. II dieser Arbeit.

**) Zahlbericht Satz 22, S. 191.

Nun ist aber nach obigem die (p^f-1)-te Potenz von α im Strahl. Somit muß

$$p^f - 1 \equiv 0 \ (n_2)$$

sein, woraus

Satz: *Wenn das in p enthaltene Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k im Körper K die n_2-te Potenz eines Ideals wird, so muß*

$$p^f - 1 \equiv 0 \ (n_2)$$

sein, wenn p^f die Norm von $\mathfrak{p}$ in k ist.

7. Es sei wieder $\mathfrak{P}'$ irgend ein Teiler von $\mathfrak{P}$, invariant in bezug auf S; Ω eine Zahl des Strahles, mit dem Führer $\mathfrak{P}'$, deren Relativnorm in bezug auf K_u gleich 1 ist. Es sei $l^u = m_1$, $m_1' m_2 = n$; also:

$$\Omega \equiv 1 \ (\mathfrak{P}'),$$

$$\Omega^{1+S^{m_1}+S^{2m_1}+\cdots+S^{(m_2-1)m_1}} = 1.$$

Man darf setzen

$$\Omega = A^{1-S^{m_1}}.$$

Es ist nämlich

$$A = 1 + \Omega + \Omega^{1+S^{m_1}} + \cdots + \Omega^{1+S^{m_1}+S^{2m_1}+\cdots+S^{(m_2-2)m_1}}.$$

Da Ω im Strahl liegt und $\mathfrak{P}' = S\mathfrak{P}'$ ist, muß sein

$$A \equiv m_2 \ (\mathfrak{P}');$$

da $p \neq l$, wird $A \neq 0$.

Wir bestimmen ferner eine ganze rationale Zahl a so, daß

$$a m_2 \equiv 1 \ (p).$$

Dann ist auch

$$A^* = aA \equiv 1 \ (\mathfrak{P}')$$

und für die $(1-S^{m_1})$-te symbolische Potenz

$$A^{*1-S^{m_1}} = \Omega,$$

woraus

Satz: *Ist Ω eine Zahl des Strahls mit dem Führer $\mathfrak{P}'$, wo $\mathfrak{P}' = S\mathfrak{P}'$ ein Teiler von $\mathfrak{P}$ ist, so ist Ω die $(1-S^{m_1})$-te symbolische Potenz einer ganzen Zahl des Strahles, falls nur*

$$\Omega^{1+S^{m_1}+\cdots+S^{(m_2-1)m_1}} = 1,$$

$$m_1 m_2 = m.$$

Man kann nämlich A^* auch ganz machen. Denn A^* liegt im Strahl. Somit muß Zähler und Nenner von A^* ein in $\mathfrak{P}'$ enthaltenes Primideal in gleicher Potenz enthalten; man kann daher A^* so mit einer in K_{m_1} und dem Strahl liegenden Zahl multiplizieren, daß das Produkt ganz wird. Die $(1-S^{m_1})$-te symbolische Potenz dieses Produktes bleibt dagegen gleich dem gegebenen Ω.

Dieser Satz wird später die Bedeutung des Strahles besonders hervortreten lassen.

8. *Der Klassenring.*

Im Fall $f=1$ ist durch den Satz Abschnitt 6) p nach dem Modul n_2 vollständig bestimmt. Allein wenn $f>1$ ist, so ist p^f-1 eine reduzible rationale Funktion von p. In diesem Falle können wir noch viel genauer den Teiler von p^f-1 bestimmen, der durch n_2 teilbar sein muß. Dazu bedürfen wir eines andern Begriffes.

Statt, wie beim Strahl, nur diejenigen Zahlen zu betrachten, die nach einem Teiler $\mathfrak{P}'$ $(\mathfrak{P}'=S\mathfrak{P}')$ von $\mathfrak{P}$ der Einheit kongruent sind, betrachten wir *alle diejenigen Zahlen von K, die nach $\mathfrak{P}'$ einem bestimmten Rationalitätsbereich kongruent sind. Diese Zahlen werden einen Ring bilden, den Klassenring mit dem Führer $\mathfrak{P}'$ in betreff auf den bestimmten Rationalitätsbereich.* Der einfachste Klassenring ist derjenige, dessen Zahlen den ganzen rationalen Zahlen nach $\mathfrak{P}'$ kongruent sind.

Es sei wieder $\mathfrak{p}$ ein Primideal von k und

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{P}'^{n_2}.$$

Ferner sei die *Zerlegungsgruppe**) gegeben durch die Substitutionen der Trägheitsgruppe und durch

$$1,\ z,\ z^2,\ z^3,\ \ldots\ z^{f-1}$$
$$(f \text{ der Grad von } \mathfrak{p}).$$

z^f ist dann wieder eine Substitution der Trägheitsgruppe. Es sei dagegen $z^{f'}=1$; dann ist

$$f'\equiv 0 \quad (f),$$
$$f\cdot r_t\equiv 0 \quad (f'),$$

*) Zahlbericht S. 251.

wo r_t der Grad der Trägheitsgruppe ist.*) Wenn $\mathfrak{p}$ prim ist zur Diskriminante von k, so ist $r_t = 1$ und $f' = f$.

Es sei a irgend ein Teiler von f und $a \cdot b = f$. Wir bilden den Unterkörper des Trägheitskörpers, der vom Relativgrade a ist in bezug auf den Zerlegungskörper, für dessen Zahlen α also

$$z^a \alpha = \alpha.$$

Wir bezeichnen diesen Körper mit k_a und bilden den Klassenring in bezug auf k_a. Ist $\varphi(\mathfrak{p})$ die φ-Funktion**) von $\mathfrak{p}$ in k, $\varphi_a(\mathfrak{p})$***) diejenige von k_a, *so ist die*

$$\frac{\varphi(\mathfrak{p})}{\varphi_a(\mathfrak{p})} = \frac{p^f - 1}{p^a - 1} = 1 + p^a + p^{2a} + \cdots + p^{(b-1)a}\text{-te}$$

Potenz jeder Zahl von k *im Klassenring in bezug auf* k_a.

9. Wir nehmen die Primitivzahl π des Primideals $\mathfrak{p}$ in k; sie habe die folgende Eigenschaft: sie sei kongruent 0 nach allen von $\mathfrak{p}$ verschiedenen, zu $\mathfrak{p}$ konjugierten Idealen. Es ist dann z. B.†)

$$\pi^p \equiv z\pi \quad (\mathfrak{p}).$$

Hieraus folgt:

$$\pi^{1+p^a+p^{2a}+\cdots+p^{(b-1)a}} \equiv \pi \cdot (z^a \pi)(z^{2a}\pi) \cdots (z^{(b-1)a}\pi) \quad (\mathfrak{p}),$$

$$\pi^{p^u} \equiv z^u \pi \quad (\mathfrak{p}).$$

Da π Primitivzahl ist nach $\mathfrak{p}$, somit jede andere zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl von k einer Potenz von π nach $\mathfrak{p}$ kongruent ist, *muß auch für jede beliebige andere Zahl* α *von* k *die Kongruenz bestehen:*

$$\alpha^{1+p^a+p^{2a}+\cdots+p^{(b-1)a}} \equiv \alpha (z^a \alpha)(z^{2a}\alpha) \cdots (z^{(b-1)a}\alpha) \quad (\mathfrak{p}).$$

10. Wir betrachten die Relation

$$zS = S^x \cdot z,$$

speziell das x dieser Gleichung. Wir fanden,††) daß

$$x^{f'} \equiv 1 \quad (n)$$

---

*) Zahlbericht S. 251 u. ff.

**) Zahlbericht S. 192.

***) Zahlbericht S. 244.

†) Zahlbericht S. 252.

††) Vergl. S. 212 dieser Arbeit.

sein muß, wenn $z^{f'}=1$ ist. Es sei

$$\text{a)}\ x \not\equiv 1\ (l).$$

Wir bestimmen dann a als Teiler von f so, daß

$$x^a \not\equiv 1 \quad (l)$$

wird. Es ist dann

$$\frac{x^{f'}-1}{x^a-1} \equiv 0 \quad (n)$$

oder wenn $f' = b'f = b' \cdot b \cdot a$,

$$1 + x^a + x^{2a} + \cdots + x^{(bb'-1)a} \equiv 0 \quad (n).$$

11. Nachdem a gemäß 10. ausgewählt ist, bilden wir den Klassenring in bezug auf k_a mit dem Führer $\mathfrak{P}'$, wo $\mathfrak{P}'^{n_2} = \mathfrak{p}$ Primideal in k sei. Es sei wieder Π durch $\mathfrak{P}'$ teilbar, aber $\frac{\Pi}{\mathfrak{P}'}$ zu $\mathfrak{P}'$ prim. Dann ist

$$\Pi^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha \quad (\mathfrak{P}'), \qquad (\alpha \text{ eine Zahl von } k)$$

$$(z^a \Pi)^{1-S^{n_1}x^a} \equiv z^a \alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

$$(z^{2a} \Pi)^{1-S^{n_1}x^{2a}} \equiv z^{2a} \alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(z^{(bb'-1)a} \Pi)^{1-S^{n_1}x^{f'-a}} \equiv z^{(b-1)a} \alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

woraus durch Multiplikation

$$\Omega'^{1-S^{n_1}} \equiv [\alpha\,(z^a\alpha)\,(z^{2a}\alpha) \cdots (z^{(b-1)a}\alpha)]^{b'} \quad (\mathfrak{P}'),$$

wo

$$\Omega' = \Pi \cdot (z^a \Pi)^{1+S^{n_1}+S^{2n_1}+\cdots+S^{(x^a-1)n_1}}$$
$$\times (z^{2a}\Pi)^{1+\cdots+S^{(x^{2a}-1)n_1}} \cdots (z^{(bb'-1)a}\Pi)^{1+S^{n_1}+\cdots+S^{(x^{(bb'-1)a}-1)n_1}};$$

$\mathfrak{P}'$ geht in Ω' zur

$$(1 + x^a + x^{2a} + \cdots + x^{(bb'-1)a})\text{-ten}$$

Potenz auf. Denn es ist nach Konstruktion

$$z\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'; \quad S\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'.$$

Der Exponent von $\mathfrak{P}'$ in Ω' ist ein Vielfaches von n gemäß 1[illegible] Somit enthält Ω' eine Potenz von $\mathfrak{p} : \mathfrak{p}^u$ und $\left(\frac{\Omega'}{\mathfrak{p}^u}\right)$ ist zu $\mathfrak{p}$ prim. Somit da[illegible]r man setzen

$$\Omega'^{1-S^{n_1}} = \Omega^{1-S^{n_1}},$$

wo Ω zu $\mathfrak{p}$ prim ist. Man ersetze nur $\mathfrak{p}$ in Ω' durch ein zu $\mathfrak{p}$ in k äquivalentes, zu $\mathfrak{p}$ primes Ideal. Da aber jetzt Ω zu $\mathfrak{p}$ prim ist, so muß

$$\Omega \equiv S^{n_1}\Omega \quad (\mathfrak{P}'), \quad \Omega^{1-S^{n_1}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{P}')$$

sein (Abschnitt 2. (9.)); also ergibt die obige Kongruenz:

$$(\alpha\,(z^a\alpha)\,(z^{2a}\alpha)\cdots(z^{(b-1)a}\alpha))^{b'} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p})$$

oder nach der Relation in Abschnitt 9.:

$$\alpha^{(1+p^a+\cdots+p^{(b-1)a})b'} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}).$$

12. Wir hatten aber gefunden, daß n_2 die niedrigste Potenz ist von

$$\Pi^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

so daß

$$\alpha^{n_2} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p})$$

wird (vergl. Abschnitt 6.). Somit ergibt die am Ende von 11. gefundene Kongruenz:

$$(1+p^a+\cdots+p^{(b-1)a})\,b' \equiv 0 \quad (n_2).$$

Es ist noch zu bemerken, daß $b'=1$ ist, wenn $\mathfrak{p}$ prim ist zur Diskriminante von k.

Die Kongruenz gilt für jeden Teiler a von f, der macht, daß

$$x^a \not\equiv 1 \quad (l)$$

wird. Es ist ferner auch leicht zu sehen, daß die Kongruenz für keinen Teiler a gilt, der dieser Bedingung nicht genügt. Wir wollen das bisherige kurz so zusammenfassen:

Satz: *Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von k, das in K die n_2-te Potenz eines Ideales wird. Ist dann $\mathfrak{p}$ prim zur Diskriminante von k, so ist*

$$1+p^a+p^{2a}+\cdots+p^{f-a} \equiv 1 \quad (n_2),$$

falls $a > 0$ ein solcher Teiler von f ist, daß

$$x^a \not\equiv 1 \quad (l).$$

x ist gegeben durch die Relation $zS = S^x z$, wo z die Substitution des Trägheitskörpers in bezug auf den Zerlegungskörper ist.

13. Wir nehmen jetzt an: b) *Es sei* $x \equiv 1 \ (n_2)$.
Dann ist

$$zS^{n_1} = S^{n_1} z.$$

Wir bestimmen wieder Π genau wie in 11. Es muß dann sein

$$\Pi^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$
$$(z\Pi)^{1-S^{n_1}} \equiv z\alpha \quad (\mathfrak{P}').$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{\Pi}{z\Pi}\right)^{1-S^{n_1}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{P}'),$$

da $\frac{\Pi}{z\Pi}$ eine Zahl ist, deren Zähler und Nenner $\mathfrak{P}'$ in gleicher Potenz enthalten; da 'diese Zahl also so mit einer zu $\mathfrak{P}'$ primen Zahl von k multipliziert werden kann, daß das Produkt ganz und zu $\mathfrak{P}'$ prim wird.

Es folgt somit

$$\alpha \equiv z\alpha \quad (\mathfrak{p}).$$

α ist also einer Zahl des Zerlegungskörpers kongruent, und da in diesem $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades wird,*) ist α einer ganzen rationalen Zahl nach $\mathfrak{p}$ kongruent. α liegt also im Ring in bezug auf die ganzen rationalen Zahlen. Andrerseits ist aber wieder n_2 die kleinste Zahl, die macht, daß $\alpha^{n_2} \equiv 1 \ (\mathfrak{p})$ ist. Somit wird, da die $(p-1)$-te Potenz jeder ganzen rationalen, zu p primen Zahl $\equiv 1 \ (p)$ ist:

$$p - 1 \equiv 0 \quad (n_2).$$

Hieraus der **Satz:** *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von* k, *das in* K *die* n_2*-te Potenz eines Ideals wird. Es ist dann*

$$p - 1 \equiv 0 \quad (n_2),$$

wenn $x \equiv 1 \ (n^2)$ *ist in* $zS = S^x z$, z *die Substitution des Trägheitskörpers in bezug auf den Zerlegungskörper.*

14. Es sei $n_2 = n'n''$, wo n' ein von 1 und n_2 verschiedener Teiler von n_2 sei:

$$1 < n' < n_2.$$

Es sei dann c) $x \equiv 1 \ (n')$, $\not\equiv 1 \ (ln')$.

---

*) Zahlbericht S. 253, Satz 70.

Wir gebrauchen wieder die gleichen Bezeichnungen, wie im vorhergehenden. Es ist:

$$\Pi^{1-S^{n''n_1}} \equiv \alpha' \quad (\mathfrak{P}')$$

und da $zS^{n''n_1} = S^{n''n_1}z$, so findet man wieder, genau wie in 13., daß

$$p-1 \equiv 0 \quad (n'').$$

Es sei nun aber f' die kleinste Zahl, so daß

$$x^{f'} \equiv 1 \quad (n_2).$$

Dann ist sicher

$$x^{f'-1} + x^{f'-2} + \cdots + x + 1 \equiv 0 \quad (n'').$$

Es sei n^* der größte gemeinsame Teiler von n_2 und

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{f'-1}).$$

Es ist dann $n_2 \geqq n^* \geqq n''$.

Wenn

$$\Pi^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

so folgt

$$\Pi^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$
$$(z\Pi)^{1-S^{n_1 x}} \equiv z\alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(z^{f'-1}\Pi)^{1-S^{n_1 x^{f'-1}}} \equiv z^{f'-1}\alpha \quad (\mathfrak{P}'),$$

also

$$\Omega'^{1-S^{n_1}} \equiv \alpha(z\alpha)(z^2\alpha)\cdots(z^{f'-1}\alpha) \quad (\mathfrak{P}'),$$

wo

$$\Omega' = \Pi(z\Pi)^{1+S^{n_1}+S^{2n_1}+\cdots+S^{n_1(x-1)}} \ldots (z^{f'-1}\Pi)^{1+S^{n_1}+\cdots+S^{n_1(x^{f'-1}-1)}}.$$

Diese Zahl ist durch

$$\mathfrak{P}'^{1+x+x^2+\cdots+x^{f'-1}}$$

teilbar. Der Exponent ist aber durch n^* teilbar, also ist

$$\Omega'^{(1-S^{n_1})\frac{n_2}{n^*}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{P}')$$

oder

$$(\alpha(z\alpha)(z^2\alpha)\cdots(z^{f'-1}\alpha))^{\frac{n_2}{n^*}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}).$$

Dies ergibt gemäß Abschnitt 9:

$$\alpha^{(1+p+p^2+\cdots+p^{f'}-1)\frac{n_2}{n^*}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}).$$

Da aber n_2 die kleinste Potenz von α ist, die macht, daß die Kongruenz

$$\alpha^{n_2} \equiv 1 \quad (\mathfrak{p})$$

erfüllt ist, so muß sein

$$1+p+p^2+\cdots+p^{f'-1} \equiv 0 \quad (n^*).$$

Wir haben daher den **Satz:** *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von* k, *das in* K *die* n_2*-te Potenz eines Ideals wird. Dann ist*

$$p-1 \equiv 0 \ (n'), \quad 1+p+p^2+\cdots+p^{f'-1} \equiv 0 \ (n^*),$$
$$n'n^* \geqq n_2,$$

falls nur 1. $x-1$ *durch* n' *nicht aber durch* ln' *teilbar ist, wo* $zS = S^x z$ *und* z *die Substitution des Trägheitskörpers in bezug auf den Zerlegungskörper ist: 2.* n^* *der größte gemeinsame Teiler von* n_2 *und* $1+x+\cdots+x^{f'-1}$ *ist, wenn* $x^{f'}$ *die kleinste Potenz von* $x: \equiv 1 \ (p)$ *ist.*

Eine Zusammenfassung der drei letzten Sätze findet sich in der Überschrift des Kapitels.

15. Wir haben bis jetzt stets an der Annahme $p \neq l$ festgehalten und hierbei merkwürdige Beziehungen zwischen den Relativkörpern, deren Relativdiskriminanten p enthalten, und gewissen Ringen und Strahlen des Grundkörpers gefunden. Es soll deshalb auch für die Primzahl l eine solche Beziehung hergestellt werden.

Es sei $\mathfrak{l}$ ein in l enthaltenes Primideal von k; in $\mathfrak{l}$ sei ein Primideal $\mathfrak{L}$ enthalten, das zugleich in der Relativdiskriminante aufgehe. Wir bestimmen wieder ganz gleich n_1 und n_2 $(n_1 n_2 = n)$ für $\mathfrak{l}$. Es ist dann

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{L}'^{n_2},$$

wo $\mathfrak{L}'$ ein Ideal von K ist und $\mathfrak{L}' = S\mathfrak{L}'$. Es sei $n_2 = l^{r_2}$ und $r_{\mathfrak{l}}$ der Grad der Trägheitsgruppe von $\mathfrak{l}$ in k. Zur Strahl- und Ringbildung darf man aber jetzt nicht *mehr* $\mathfrak{L}'$ *selbst als Führer gebrauchen, sondern das Ideal*

$$\mathfrak{L}'^{r_{\mathfrak{l}} r_2 n_2 + 1}.$$

Es verhält sich dann alles ganz gleich. Diesen Ringen bezw.

Strahlen entsprechen im Körper k Ringe bezw. Strahlen mit dem Führer

$$\mathfrak{l}^{r_t r_2 + 1}.$$

Die Klassenanzahl z. B. des Kongruenzstrahles mit dem Führer $\mathfrak{l}^{r_t r_2 + 1}$ in k ist

$$h_s = l^{f r_t r_2} (l^f - 1),$$

wenn die Norm von $\mathfrak{l}$ gleich l^f ist. Die wichtigste Aufgabe und zugleich der Beweis dafür, daß diese Festsetzung die richtige ist, wird durch den Beweis der Richtigkeit des Satzes Abschnitt 7*) in unserem jetzigen Falle $(\mathfrak{p} = l)$ gegeben.

Es sei Ω eine Zahl des Strahles

$$\Omega \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{r_t r_2 n_2 + 1})$$

und zugleich

$$\Omega^{1 + S^{m_1} + S^{2m_1} + \cdots + S^{(m_2 - 1)m_1}} = 1.$$

Dann ist

$$\Omega = A^{1 - S^{m_1}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}'^{r_t r_2 n_2 + 1}).$$

Wir können $m_1 \geqq n_1$ annehmen; denn wäre $m_1 < n_1$, so würde aus obiger Kongruenz um so mehr folgen

$$\Omega' = A^{1 - S^n} \equiv 1 \quad (\mathfrak{L}^{r_t r_2 n_2 + 1}).$$

Wir nehmen also $m_1 \geqq n_1$, $m_1 m_2 = n$ an. Ω ist eine Einheit. Also haben (A) und $(S^{m_1} A)$ den größten gemeinsamen Teiler 1.

Wenn aber A den Teiler $\mathfrak{L}''$ mit $\mathfrak{L}'$ gemein hat, so ist sicher $\mathfrak{L}'' = S^{m_1} \mathfrak{L}''$ und wir können den Teiler als einfach in A aufgehend denken.**) Denn $\mathfrak{L}''^{m_1}$ ist ja Ideal im Körper K_{m_1}, das aber durch ein zu $\mathfrak{L}'$ primes äquivalentes Ideal ersetzt werden kann. Man braucht deshalb nur eine solche Potenz von A zu nehmen, daß die Bedingung erfüllt werden kann. Würde aber $\mathfrak{L}''$ einfach in A aufgehen, so wäre

$$A \equiv S^{m_1} A \quad (L^{r_t r_2 n_2 + 2}).$$

A genüge der Relativgleichung

$$A^{m_2} - \lambda_1^{(i)} A^{m_2 - 1} + \lambda_2^{(i)} A^{m_2 - 2} - \cdots - (-1)^{m_2 - 1} \lambda_{m_2}^{(i)} = 0,$$

---

*) Vgl. diese Arbeit S. 221.

**) Es kann $\mathfrak{L}''$ auch zu einem durch l teilbarem Exponenten in A aufgehen. Dieser Fall erledigt sich aber ebenfalls sofort.

wo die Koeffizienten $\lambda^{(i)}$ alle in K_i liegen, wenn $m_1 = l^i$. Es ist dann

$$\lambda_v \equiv \frac{m_2(m_2-1)\cdots(m_2-v+1)}{1\cdot 2\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ v} \Lambda^v \quad (\mathfrak{L}^{r_t r_2 n_2+v+1}),$$

$$(m_2-v)\,\lambda_v \equiv m_2\binom{m_2-1}{v}\Lambda^v \quad (\mathfrak{L}^{r_t r_2 n_2+v+1}), \qquad (v=1,2,\ldots m_2)$$

woraus, da $(m_2-v)\,\lambda_v$ in K_i liegt, also nur durch eine Potenz von $\mathfrak{L}''^{m_2}$ teilbar sein kann:

$$(m_2-v)\,\lambda_v \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}^{(r_t(r-i)n_2+m_2)}); \quad v>0.$$

Ist Δ die Diskriminante der Gleichung für Λ, so wird daher

$$\Delta \equiv (-1)^{\frac{m_2(m_2-1)}{2}} m_2^{m_2} \lambda_{m_2}^{m_2-1} \quad (\mathfrak{L}''^{(r_t(r-i)n_2+m_2)m_2}),$$

$$\Delta \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{L}^{(r_t(r-i)n_2+m_2)m_2}).$$

Wegen der Bedingung

$$\Lambda \equiv S^{m_1}\Lambda \quad (\mathfrak{L}''^{r_t r_2 n_2+2})$$

muß aber sein*)

$$\Delta \equiv 0 \quad (\mathfrak{L}''^{(r_t r_2 n_2+2)m_2(m_2-1)}).$$

Also ist

$$(r_t r_2 n_2+2)(m_2-1) < r_t(r-i)n_2+m_2,$$

was unmöglich ist, da

$$r_2 > r-i,$$

$$m_2-1 \geqq 1;$$

somit ist die Annahme, daß Λ einen Teiler mit $\mathfrak{L}'$ gemein hat, zu verwerfen. Man erkennt auch leicht, daß man Λ dann immer in den Strahl bringen kann. Daraus der

Satz: *Ist Ω eine Strahlzahl mit dem Führer $\mathfrak{L}'^{r_t r_2 n_2+1}$, wo $\mathfrak{L}' = S\mathfrak{L}'$ ein Teiler von $\mathfrak{L}$ ist, so ist Ω die* $(1-S^{m_1})$-te *symbolische Potenz einer ganzen Zahl des Strahles, falls*

$$\Omega^{1+S^{m_1}+\cdots+S^{(m_2-1)m_1}} = 1, \quad m_1 m_2 = n$$

ist.

16. Um den vollständigen Klassenstrahl zu erhalten, bildet man den Strahl mit sämtlichen in der Relativdiskriminante aufgehenden Primidealen.

*) Vergl. den Beweis S. 219 dieser Arbeit.

Für diesen gelten sämtliche Sätze, wie für den einfachen Strahl. Derselbe heißt *Klassenstrahl.* Für denselben gelten die Sätze des nächsten Kapitels; der größtmögliche Klassenstrahl für einen gegebenen Führer heiße, wie später noch näher ausgeführt wird, **Zahlstern.**

17. *Anwendung auf das Problem der komplexen Multiplikation.*

Wir haben in k nur eine Substitution s, da k quadratisch ist. Es ist

$$sS = S^x s$$

und wir haben über diese Beziehung schon folgendes festgesetzt:*)

Wäre $x \equiv 1\ (n)$, so wäre der Körper K selbst ein *Abel*scher, also durch Einheitswurzeln lösbar.**) Allein solche Gleichungen kommen in der komplexen Multiplikation nicht vor, da die Gleichungen nur durch Adjunktion von Quadratwurzeln zerfallen, aber durch keine weiteren *Abel*schen Größen.***) Es ist also x nur in dem Fall $n = 2$ kongruent 1 nach n, ein Fall der trivial und übrigens im folgenden enthalten ist. Es muß also, da

$$x^2 \equiv 1 \quad (n) \text{ ist,}$$

$$x \equiv -1 \quad (n)\dagger)$$

sein und deshalb

$$sS = S^{-1}s$$

werden.

18. Es sei d die Diskriminante des quadratischen Körpers k. Wenn dann $\left(\frac{d}{p}\right) = +1$ ist, so zerfällt p in k in 2 Primideale,††) und der Satz von Abschnitt 6. ergibt, weil $f = 1$:

$$p - 1 = p - \left(\frac{d}{p}\right) \equiv 0 \quad (n_2).$$

Ist dagegen $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, so ist (p) selbst Primideal in k und $z = s$; somit ergibt der Satz Abschnitt 12., daß für jedes ungerade n_2

$$p + 1 = p - \left(\frac{d}{p}\right) \equiv 0 \quad (n_2),$$

---

*) S. 213 dieser Arbeit.

**) Zahlbericht Satz 131, S. 339.

***) *Weber:* Math. Annalen, Bd. 49, S. 99.

†) Im Fall $n = 2^r$ ist auch $x \equiv -1 + \frac{n}{2}$ möglich.

††) Zahlbericht Satz 97, S. 284.

denn wegen Abschnitt 17. ist immer $(x-1)$ zu n prim. Die Kongruenz ist auch für jede in d aufgehende Primzahl p richtig, da ja r_l für ein in d enthaltenes p stets gleich 2 ist, also zu n_2 prim wird.

Der Satz Abschnitt 14. ergibt, wie sofort ersichtlich, für $l=2$, $n=2^r$ dieselbe Relation

$$1+p=p-\left(\frac{d}{p}\right)\equiv 0 \quad (n_2).$$

Denn $x+1=0$ ist durch n_2 teilbar, also $n_2=n^*$.

Man sieht leicht, daß alle diese Kongruenzen auch in dem Falle gelten, daß p in d aufgeht. Da dann $\left(\frac{d}{p}\right)\equiv 0$ *) wird, andererseits aber $p \neq l$ vorausgesetzt ist, so ersieht man, daß man auf einen Widerspruch stößt. Solche Gleichungen sind deshalb unmöglich. Wir haben den **Satz:** *Jede von l verschiedene Primzahl p, die in K die n_2-te Potenz eines Ideals wird, wo K ein aus den Klassengleichungen der komplexen Multiplikation entspringender Körper ist, genügt einer Kongruenz*

$$p-\left(\frac{d}{p}\right)\equiv 0 \quad (n^2),$$

falls d die Diskriminante von k, dem quadratischen Körper, ist und $\left(\frac{d}{p}\right)$ das Legendresche Symbol.

Kapitel IV. *Der Klassenstrahl und der Stern.*

Hauptsatz: Gegeben ein zu einem gegebenen Körper k relativ Abelscher Körper K vom Relativgrade n und mit einer Gruppe G in bezug auf k. Wir bilden den Strahl in k, dessen Führer f alle in der Relativdiskriminante von K in bezug auf k aufgehenden, von einander verschiedenen Primideale enthält. Dann gibt es in diesem Strahl n Strahlklassen, deren Abelsche Gruppe holoedrisch-isomorph ist mit der Gruppe G.

Bildet man im Körper K den entsprechenden Strahl, dessen Führer alle von einander verschiedenen, in der Relativdifferente aufgehenden Primideale von K enthält, so werden alle jene n Strahlklassen von k Hauptstrahlklassen in dem Strahle von K, der den alten Strahl von k enthält.

---

*) Zahlbericht S. 284, Satz 97.

1. Es sei in unserem *Galois*schen Körper k wieder die irreduzible, relativzyklische Gleichung (1.) Kapitel III gegeben, vom Grade $n = l^r$. Wir denken uns $K = (\Theta, k)$ aufgebaut gemäß Kapitel III, Abschnitt 3 aus $K_1, K_2, \dots K_r = K$. Dann gilt für einen beliebigen Klassenstrahl in K der **Satz:** *Es gibt in $K_r = K$ eine Strahleinheit, deren Relativnorm in bezug auf K_{r-1} gleich Eins ist und die nicht die $(1-S)$-te symbolische Potenz einer Strahleinheit wird.*

Beweis: Wir nehmen die Strahleinheit H von K, deren Relativnorm in bezug auf K_{r-1} gleich Eins ist, und die, mit irgend einer Einheit von K_{r-1} multipliziert, niemals die $(1 - S^{\frac{n}{l}})$-te symbolische Potenz einer Strahleinheit wird.*) Dieselbe existiert. Es sei dagegen

$$H = E^{(1-S)^y},$$

wo E irgend eine Strahleinheit und y eine ganze rationale Zahl sei. Dann muß sein

$$y < \frac{n}{l}.$$

Denn wäre

$$y \geqq \frac{n}{l},$$

so kann man setzen

$$(1-S)^{\frac{n}{l}} = f_1(S)\,(1 - S^{\frac{n}{l}}) + f_2(S)(1 + S^{\frac{n}{l}} + \dots + S^{(l-1)\frac{n}{l}}),$$

wo f_1, f_2 ganze rationale Funktionen mit ganzen rationalen Koeffizienten sind. Es sei nämlich

$$Z = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

so ist $\dfrac{(1-Z)^{\frac{n}{l}}}{1-Z^{\frac{n}{l}}}$ eine Einheit, und da**) $1, Z, Z^2, \dots Z^{(l-1)\frac{n}{l}}$ eine Basis des Körpers (Z) darstellen, so ist

$$\frac{(1-Z)^{\frac{n}{l}}}{1-Z^{\frac{n}{l}}} = f_1(Z),$$

---

*) Zahlbericht Satz 92, S. 275. Die dortigen Entwicklungen gelten genau ebenso für jedes Strahlgrundeinheitensystem.

**) Zahlbericht Satz 121, S. 332.

wo f_1 eine ganze rationale Funktion mit ganzen rationalen Koeffizienten ist. Die algebraische Gleichung

$$(1-x)^{\frac{n}{l}} - f_1(x)(1-x^{\frac{n}{l}}) = 0$$

ist somit für $Z=x$ gelöst. Da aber Z der irreduziblen Gleichung*) genügt:

$$1+x^{\frac{n}{l}}+x^{2\frac{n}{l}}+x^{3\frac{n}{l}}+\cdots+x^{(l-1)\frac{n}{l}}=0,$$

so muß sein

$$(1-x)^{\frac{n}{l}} - f_1(x)(1-x^{\frac{n}{l}}) = f_2(x)(1+x+\cdots+x^{(l-1)\frac{n}{l}}),$$

woraus obige Formel folgt.

Da aber $y \geqq \frac{n}{l}$ sein soll, so wird umsomehr

$$(1-S)^y = f_1^*(S)(1-S^{\frac{n}{l}}) + f_2^*(S)(1+S^{\frac{n}{l}}+\cdots+S^{(l-1)\frac{n}{l}})$$

oder

$$H = E^{(1-S)^y} = \varepsilon^{(r-1)}(E'_1)^{1-S^{\frac{n}{l}}}$$

($\varepsilon^{(r-1)}$ eine Einheit von K_{r-1}).

Dies widerspricht der Konstruktion von H. Somit ist $y < \frac{n}{l}$. Wir wählen aber jetzt y so groß, daß E nicht mehr die $(1-S)$-te symbolische Potenz einer Strahleinheit wird. Es sei

$$\varepsilon^{(r-1)} = E^{1+S^{\frac{n}{l}}+\cdots+S^{(l-1)\frac{n}{l}}}.$$

Damit ist $\varepsilon^{(r-1)(1-S)^y} = 1$, also $\varepsilon^{(r-1)(1-S)^{y-1}}$ gleich einer Einheit von k. Hieraus findet man durch Weiterschließen, daß E die gewünschte Strahleinheit ist, oder doch so mit einer neuen multipliziert werden kann, daß das Produkt alle Bedingungen erfüllt.

2. Wir bilden jetzt den *Stern* *, d. h. den Klassenstrahl, dessen Führer sämtliche von einander verschiedene in der Relativdiskriminante aufgehende Primideale von K enthält.**) Es sei $\mathfrak{F}$ der Führer dieses Sterns und wir nehmen die Einheit E von Satz 1 dieses Strahles. Dann ist sicher:

$$E = A^{1-S^{\frac{n}{l}}}.$$

*) Zahlbericht, Satz 120, S. 331.

**) Die Primzahl l ist im Führer stets gesondert, gemäß Abschnitt 15, Kap. III zu behandeln.

Da E im Strahl liegt, ist A zu allen in der Relativdiskriminante aufgehenden Primidealen prim nach den Sätzen von Kapitel III Abschnitt 7. und 15. Da andererseits $(A)=(S^{\frac{n}{l}}A)$ und (A) eine Strahlzahl ist, so muß (A) ein Strahlideal des Körpers k sein. Wäre dasselbe Hauptstrahl in k, so wäre

$$A = H\cdot\alpha,$$

wo H eine Strahleinheit, α eine Strahlzahl von k wäre. Hieraus folgte:

$$E = H^{1-S^{\frac{n}{l}}}$$

gegen die Definition von E. Also ist (A) nicht Hauptstrahl in k und es ist $\mathfrak{a}=(A)=(SA)$.

Dagegen ist

$$\mathfrak{a}^n = (N(A)) \mathrel{\underset{=}{\overset{\frown}{=}}} 1$$

im Strahl von k. Dabei bedeute $N(A)$ die Relativnorm von A in bezug auf k.

Wäre nun

$$\mathfrak{a}^{n'} \mathrel{\underset{=}{\overset{\frown}{=}}} 1 \quad (\mathfrak{f}) \quad \text{und } n' < n,$$

so darf man wegen des letzten Resultats n' als Teiler von n annehmen und setzen $n'n''=n$. Es sei n' die kleinste Potenz von l, die dieser Bedingung genügt. Nun ist wegen $n'<n$, $n''\geqq l$, also $\frac{n''}{l}$ eine ganze Zahl. Somit wird

$$\mathfrak{a}^{n'} = (A^{1+S^{\frac{n''}{l}}+\cdots+S^{(n'-1)\frac{n''}{l}}}) = \alpha\cdot H,$$

wo α eine Strahlzahl von k, H eine Strahleinheit ist. Somit würde

$$E = A^{1-S^{\frac{n}{l}}} = H^{*1-S^{\frac{n''}{l}}},$$

H^* eine Strahleinheit, was gegen die Definition von E ist. Somit muß $n'=n$ sein und n ist die kleinste Potenz, so daß

$$\mathfrak{a}^n \mathrel{\underset{=}{\overset{\frown}{=}}} 1 \quad (\mathfrak{f}).$$

Somit haben wir den **Satz:** *Existiert ein zum Körper k relativzyklischer Körper K vom Relativgrade n, so gibt es im Klassenstrahl des Körpers k, dessen Führer sämtliche von einander verschiedene Primideale der*

*Relativdiskriminante von K in bezug auf k enthält, ein Strahlideal, dessen n-te Potenz die kleinste ist, die Hauptidealstrahl in k ist.**)

3. Es seien nun 2 relativ-zyklische Körper K_1 und K_2 vom selben Relativgrade n in bezug auf k gegeben. Wir bilden den Strahl, dessen Führer alle von einander verschiedenen, in den Relativdiskriminanten beider Körper K_1 und K_2 aufgehenden Primideale enthält. Derselbe sei $\mathfrak{F}$. Wir nehmen jetzt die Strahleinheit E_1 von K_1, in bezug auf k, die so beschaffen ist, wie sie der Satz in 1. verlangt. Es ist dann

$$E_1 = A_1^{1-S_1^{\frac{n}{l}}}$$

und A_1 eine Strahlzahl, (A_1) ein Strahlideal von k. Wenn S_1 die Substitution von K_1, S_2 die von K_2 ist, so muß sein

$$A_1 = S_2 A_1 .$$

Nun bilden wir eine zweite Einheit E_2 des Körpers (k, K_1, K_2), indem wir K_2 als Relativkörper zu (k, K_1) ansehen. Dieselbe habe die Eigenschaften von E_1. Es wird

$$E_2 = A_2^{1-S_2^{\frac{n}{l}}},$$

A_2 eine Strahlzahl, und wieder ein Strahlideal von k. Dieses Resultat wird ohne Mühe durch Heranziehung der relativen Strahlgrundeinheiten eingesehen.

Wäre nun aber

$$A_1^{x_1} A_2^{x_2} = \alpha \cdot H$$

und α eine Strahlzahl von k, H eine Strahleinheit, so wäre wegen $A_1 = S_2 A_1$:

$$E_2^{x_2} = A_2^{x_2(1-S_2^{\frac{n}{l}})} = H^{1-S_2^{\frac{n}{l}}},$$

was unmöglich ist nach der Definition von E_1, wenn nicht $x_2 \equiv 0 \ (l)$ ist. Es kommt überhaupt nur auf die in x_2 aufgehende Potenz von l an und wir nehmen gleich an:

$$x_2 = l^i; \qquad (i < r)$$

also ergibt die obige Beziehung

$$A_2^{l^i(1-S_2)} = H^{1-S_2}.$$

---

*) Vergl. Zahlbericht Satz 94, S. 279.

Nun ist aber wegen $(A_2) = (S_2 A_2)$

$$A_2^{l^i} = H^* A_2^{1+S_2+S_2^2+\cdots+S_2^{l-1}},$$

wo H^* eine Einheit ist. Also

$$A_2^{1-S^{l^i}} = (H H^{*-1})^{1-S_2},$$

woraus

$$E_2 = A_2^{1-S_2 \frac{n}{i}} = H^{**1-S_2}$$

gegen die Definition von E. Es muß also $i = r$, oder $x_2 = n$, daher auch $x_1 = n$ sein, und es gibt somit zwei von einander unabhängige Strahlklassen in k, deren n-te Potenz erst Hauptstrahl in k wird.

Dadurch erkennt man die Richtigkeit des Satzes:

Satz: *Gegeben ein zu einem gegebenen Körper k relativ Abelscher Körper K vom Relativgrad n und der Gruppe G in bezug auf k. Wir bilden den Strahl in k, dessen Führer $\mathfrak{f}$ alle in der Relativdiskriminante von K in bezug auf k aufgehenden, von einander verschiedenen Primideale von k enthält. Dann gibt es in diesem Strahl n Strahlklassen, deren Abelsche Gruppe holoedrisch isomorph ist mit der Gruppe in G.*

Bildet man im Körper K den entsprechenden Strahl, dessen Führer $\mathfrak{F}$ alle von einander verschiedenen, in der Relativdiskriminante aufgehenden Primideale von K enthält, so werden alle jene n Strahlklassen von k Hauptstrahlklassen in dem Strahl von K.

Hierin liegt der Grund, warum wir den Strahl mit dem Führer $\mathfrak{F}$ den *Klassenstrahl* genannt haben. Der größtmögliche Klassenstrahl, zu einem gegebenen Führer $\mathfrak{f}$, heißt **Stern des Führers** $\mathfrak{f}$.

Neue Beweise einiger Sätze aus der Theorie der linearen Komplexe.

Von Herrn *St. Jolles* in Halensee.

1. In den folgenden Untersuchungen wird synthetisch, ohne die Theorie der vertauschbaren involutorischen Verwandtschaften zu Hilfe zu nehmen, der durch einen Bündel linearer Komplexe bestimmte polare Raum abgeleitet. Der Komplexbündel unterliegt keinerlei beschränkenden Voraussetzungen, so daß seine Komplexe eine (reelle) Regelschar II. Ordnung gemeinsam haben können oder nicht. Denselben polaren Raum bestimmt bekanntlich auch der Stammbündel des Komplexbündels, d. h. der Bündel linearer Komplexe, die mit allen Komplexen des Bündels in Involution liegen, oder wie hier gesagt wird, für die Komplexe des Bündels nullinvariant sind.

Den Ausgangspunkt der Darlegungen bildet der Nachweis, daß eine lineare Strahlenkongruenz zusammen mit zwei zugeordneten Geraden des von ihr bestimmten geschart involutorischen Raumes i. A. einem linearen Komplexe angehört. Von diesem Ausgangspunkte gelangt man sehr einfach zu den bekannten Sätzen über zwei für einander nullinvariante lineare Komplexe und über die für einander nullinvarianten Komplexe eines Büschels linearer Komplexe, endlich auch zu den angeführten Grundeigenschaften des Komplexbündels.

2. Durch zwei zugeordnete Geraden g, g' und einen zu ihnen windschiefen Doppelstrahl l eines geschart involutorischen Raumes Σ geht i. A. eine aus zugeordneten Geraden von Σ bestehende involutorische Regelschar II. Ordnung R^2, deren Leitschar ebenfalls aus zugeordneten Geraden von Σ besteht. Die involutorische Paarung von R^2 ist, da diese Regelschar

den Doppelstrahl l von Σ enthält, hyperbolisch; R^2 enthält folglich noch einen zweiten Doppelstrahl m von Σ. Nun ist durch die Gerade g und die Kongruenz der Doppelstrahlen von Σ ein linearer Komplex Γ bestimmt, der die Regelschar R^2 in den drei Strahlen g, l, m schneidet. Zu ihm gehören somit alle Strahlen von R^2, insbesondere g', und es ergibt sich also mit Rücksicht darauf, daß jede lineare Kongruenz als Kongruenz der Doppelstrahlen eines geschart involutorischen Raumes aufgefaßt werden kann:

Eine lineare Strahlenkongruenz und zwei zugeordnete Geraden g, g' des durch die Kongruenz bestimmten geschart involutorischen Raumes gehören i. A. einem linearen Strahlenkomplexe an.

Aus dieser Eigenschaft zweier zugeordneten Geraden eines geschart involutorischen Raumes folgt ohne weiteres der bekannte Satz:

Die Komplexe eines Büschels linearer Komplexe werden durch den geschart involutorischen Raum, dessen Doppelstrahlen die Trägerkongruenz des Büschels bilden, in sich selbst übergeführt.

3. Die Komplexe eines Büschels linearer Komplexe ordnen einer Geraden g i. A. die Strahlen einer zum Büschel projektiven Regelschar II. Ordnung R^2 zu, deren Leitschar zur Trägerkongruenz des Büschels gehört. Ferner sind die Strahlen von R^2 auch paarweise einander zugeordnet bezüglich des durch g gehenden Komplexes Γ des Büschels. Die durch letztere Zuordnung hervorgerufene involutorische Paarung der Strahlen von R^2 erweist sich, da g ein Doppelelement dieser Involution ist, als hyperbolisch, und folglich gehört zu ihr als zweites Doppelelement noch ein zweiter Strahl h von Γ. Der Komplex Γ'' des Büschels, für den g und h einander zugeordnet sind, ist somit für Γ nullinvariant.*) Die Strahlen der Trägerkongruenz des Büschels sind nun die Doppelstrahlen eines geschart involutorischen Raumes Σ, sonach geht der Komplex Γ nach 2. durch den g in Σ zugeordneten Strahl. Dieser Strahl muß der Regelschar R^2 angehören, und da R^2 außer g nur noch den Strahl h von Γ enthält, mit h identisch sein. — Eine durch g gehende Ebene ε enthält einen Doppelstrahl d von Σ, folglich sind durch die für einander nullinvarianten Komplexe Γ und Γ'' der Ebene ε bzw. die Nullpunkte (g, d) und (h, d) zugewiesen; sie sind, da g auch h in Σ zugeordnet ist, zugeordnete Punkte von Σ. Fällt g

*) Für einander nullinvariante oder in Involution liegende lineare Komplexe hat zuerst Herr *F. Klein* in den Math. Annalen, Bd. II, S. 201, 1870, untersucht.

nach einander mit je einem der in ε gelegenen Strahlen je eines Komplexes des Büschels zusammen, so gilt demnach:

> Jeder Komplex eines Büschels ist für je einen andern Komplex des Büschels nullinvariant. Die hierdurch bewirkte Paarung der Komplexe des Büschels ist eine involutorische und zwar sind die Nullpunkte einer Ebene oder die Nullebenen eines Punktes bezüglich zweier für einander nullinvarianten Komplexe zugeordnete Elemente bezüglich der Trägerkongruenz des Büschels d. h. zugeordnete Elemente des durch diese bestimmten geschart involutorischen Raumes. Sind zwei lineare Komplexe für einander nullinvariant, so sind je zwei Strahlen des einen Komplexes, die durch den andern einander zugeordnet werden, auch durch die Schnittkongruenz beider Komplexe einander zugeordnet.

4. Für einen Komplex Γ eines Bündels linearer Komplexe sind bekanntlich die Komplexe eines gewissen im Bündel enthaltenen Komplexbüschels $[C_\Gamma]$ nullinvariant, folglich gehört zu dem Nullpunkte E einer Ebene ε bezüglich des Komplexes Γ eine in ε gelegene Gerade e_ε, deren Punkte die Nullpunkte von ε bezüglich der Komplexe des Büschels $[C_\Gamma]$ sind. e_ε ist ein Strahl der Trägerkongruenz C_Γ dieses Büschels. Da ihre Strahlen durch Γ paarweise einander zugeordnet werden, so ist e_ε demjenigen Strahle e_E von C_Γ zugeordnet, der durch E geht. Durch einen beliebigen Strahl g des in ε gelegenen Strahlenbüschels E geht eine bestimmte Kongruenz C_g des Komplexbündels, sie ist der Träger eines Komplexbüschels $[C_g]$, zu dem sowohl Γ gehört als auch derjenige Komplex Γ_g' des Büschels $[C_g]$, der ε den Nullpunkt (g, e_ε) zuweist. Nun sind e_ε, e_E Strahlen von Γ_g', die durch Γ einander zugeordnet werden, folglich sind sie nach 3. auch zugeordnete Strahlen des geschart involutorischen Raumes Σ_g, dessen Doppelstrahlen die Kongruenz C_g bilden. Fällt Γ nach einander mit den übrigen Komplexen $\Gamma', \Gamma'', \ldots$ des Bündels zusammen, so fallen die durch Γ bestimmten Elemente E, e_ε von ε nach einander bezw. mit den Elementen $E', e_\varepsilon' - E'', e_\varepsilon'' - \cdots$ dieses ebenen Feldes zusammen. Zwei beliebige Strahlenbüschel $[E'], [E''], \ldots$ von ε haben aber einen Strahl s gemein, den Strahlen $e_\varepsilon', e_\varepsilon''$ sind somit durch Γ'', Γ''' bezw. die Strahlen $e_{E'}, e_{E''}$ zugeordnet, die ihnen auch in dem durch die Schnittkongruenz von Γ', Γ'' bestimmten geschart involutorischen Raume Σ_s entsprechen. $e_\varepsilon', e_\varepsilon''$ liegen aber in ε, folglich liegen $e_{E'}, e_{E''}$ in der ε in Σ_s zugeordneten Ebene und schneiden sich in dem dem Punkte $(e_\varepsilon', e_\varepsilon'')$ in Σ_s zugeordneten Punkte $\mathfrak{E}$. Jeder Strahl e_E wird also von

allen übrigen Strahlen $e_{E'}, e_{E''}, \ldots$ geschnitten, sie gehen somit sämtlich durch einen Punkt $\mathfrak{E}$. Kurz:

Die einer Ebene ε durch die linearen Kongruenzen eines Bündels linearer Komplexe zugeordneten Ebenen gehen durch einen Punkt $\mathfrak{E}$. Die $\mathfrak{E}$ durch jene Kongruenzen zugeordneten Punkte liegen in ε.

Nach diesem und dem zu ihm dualen Ergebnisse ist durch einen Komplexbündel einer Ebene ε ein Punkt $\mathfrak{E}$ eindeutig zugewiesen. Einem in ε gelegenen Punkte entspricht eine durch $\mathfrak{E}$ gehende Ebene und umgekehrt. Zwischen den Ebenen $\varepsilon, \varepsilon', \ldots$ und den Punkten $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \ldots$ des Raumes besteht also eine korrelativ involutorische Verwandtschaft oder:

Die Ebenen $\varepsilon, \varepsilon', \ldots$ sind den Punkten $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \ldots$ als Polarebenen in einem polaren Raume Π^2 zugeordnet.

5. Sind e_ε, e_E zwei Strahlen einer linearen Kongruenz C_e des Komplexbündels, von denen e_ε in einer Ebene ε liegt, während e_E durch ihren Pol $\mathfrak{E}$ in Π^2 geht, so sind nach 4. diese Strahlen durch den Komplex Γ des Bündels einander zugeordnet, der für die in C_e sich schneidenden linearen Komplexe nullinvariant ist. Dreht sich ε um e_ε, so beschreibt demnach ihr Pol $\mathfrak{E}$ den Strahl e_E und folglich sind e_ε und e_E reziproke Polaren von Π^2. Somit ist bewiesen:

Die Strahlen einer in einem Bündel linearer Komplexe enthaltenen linearen Kongruenz sind paarweise reziproke Polaren des durch den Bündel bestimmten polaren Raumes Π^2. Je zwei dieser reziproken Polaren sind zugleich durch denjenigen Komplex des Bündels einander zugeordnet, der für die in der Kongruenz sich schneidenden linearen Komplexe nullinvariant ist. Die linearen Kongruenzen des Bündels, die durch sie bestimmten geschart involutorischen Räume und die Komplexe des Bündels werden durch den polaren Raum Π^2 in sich selbst übergeführt.

6. Durch eine Gerade g geht eine lineare Kongruenz C_g des Komplexbündels und eine lineare Kongruenz C_g' seines Stammbündels (1.). Nun sind nach 5. die Strahlen von C_g paarweise reziproke Polaren von Π^2 und zugleich einander zugeordnet durch den Komplex Γ des Bündels, der für die durch C_g gehenden Komplexe des Bündels nullinvariant ist, während C_g' aus allen Strahlen besteht, die g durch die Komplexe des Bündels zugeordnet werden. C_g und C_g' schneiden sich daher außer in g noch in dem g durch Γ zugeordneten Strahle h, und beide Strahlen sind reziproke Polaren von Π^2. Weitere Strahlen haben beide Kongruenzen nicht gemein, da im Bündel für

die durch C_g gehenden Komplexe nur der Komplex Γ nullinvariant ist. Eine analoge Betrachtung ergibt g, h auch als reziproke Polaren des durch den Stammbündel bestimmten polaren Raumes Π'^2. Dreht sich g um einen auf ihm gelegenen Punkt E, so beschreibt h in beiden polaren Räumen die Polarebene ε von E, folglich ergibt sich:

Ein Bündel linearer Komplexe und sein Stammbündel bestimmen denselben polaren Raum Π^2.

Die Punkte einer Leitgeraden einer linearen Kongruenz sind durch diese sich selbst zugeordnet, sonach liegen in einem Bündel linearer Komplexe die Punkte einer Leitgeraden einer in ihm enthaltenen linearen Kongruenz auf ihren Polarebenen in Π^2. Der polare Raum Π^2 hat also nur dann eine reelle und zwar geradlinige Inzidenzfläche, wenn zum Komplexbündel hyperbolische lineare Kongruenzen gehören. Ihre Leitgeraden bilden die eine, die gemeinsamen Strahlen der Komplexe des Bündels die andere Regelschar dieser Regelfläche. Schneiden sich die Komplexe eines Bündels in einer Regelschar, so gehen die Komplexe seines Stammbündels durch deren Leitschar.

Berlin, den 24. Juli 1904.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 130.

Heft IV.

Ausgegeben den 19. Januar.



Berlin,

W. 35, Lützowstraße 107/8.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1906.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Band 130. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg a. d. L., Universitätsstraße 54.

De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de *Riemann* fermée.

Par M. *E. Picard* à Paris.

Je me suis en 1893 (Journal de Math. 4ème série, tome 9) occupé de l'intégration de l'équation

$$\Delta u = k e^u \qquad (k > 0)$$

sur une surface de *Riemann* fermée, répondant ainsi à une question, posée antérieurement par M. *Schwarz*, relative à la détermination d'une intégrale par des singularités d'une certaine nature. Le résultat, que j'ai établi, peut être ainsi formulé:

Étant donnée une surface de *Riemann* à m feuillets, il existe une intégrale et une seule de l'équation

$$\Delta u = k e^u \qquad (k > 0)$$

jouissant des propriétés suivantes: elle est uniforme et continue sur la surface, sauf en des points donnés $O_1, O_2, \dots O_n$, et aux m points à l'infini sur chaque feuillet. On suppose que l'on ait dans le voisinage de O_i

$$u = \beta_i \log r_i + \nu_i$$

ν_i étant continu en O_i, et r_i désignant la distance de (x, y) à O_i. Pour le point à l'infini sur le feuillet de rang h, imaginons qu'on le ramène à distance finie par une inversion; en l'appelant alors O'_h, on aura

$$u = \alpha_h \log r'_h + V_h,$$

V_k étant continu en O'_k, et r'_k désignant la distance du transformé de (x, y) au point O'_k.

Les constantes α et β sont données, et l'on suppose que

$$\beta_i > -2, \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

$$\alpha_h > 2, \qquad (h = 1, 2, \dots m)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n < 0.$$

Pour démontrer ce théorème, j'ai recours au procédé alterné employé avec tant de succès par M. *Schwarz* dans ses belles études sur l'équation de *Laplace*, mais les conditions d'application de la méthode sont bien différentes, et des difficultés sérieuses se présentent.

En exposant dans mon cours, pendant l'été de 1900, mes recherches sur l'équation $\Delta u = e^u$, j'ai trouvé que plusieurs points avaient été trop sommairement indiqués dans mon mémoire de 1893 ainsi que dans une courte note supplémentaire du Journal de Mathématiques de 1898, et que des conditions supplémentaires avaient été sous-entendues; de plus, un lemme fondamental sur lequel je m'appuie peut être présenté d'une manière beaucoup plus simple et plus précise. J'ai été aussi conduit à faire diverses remarques qui ne sont pas sans intérêt pour la théorie des équations aux dérivées partielles au point de vue où je me suis placé dans diverses recherches, et qui a depuis été suivi par différents géomètres. Ce sont ces leçons que je me propose de faire connaître ici.*) Pour ce qui concerne les points sur lesquels je n'avais aucune modification à apporter, le lecteur pourra se reporter au mémoire cité de 1893. Nous allons d'ailleurs nous borner au cas où la surface de *Riemann* se réduit à un seul feuillet $(m = 1)$, le cas général ne présentant après celui-là, aucune difficulté.

I.

1. Commençons par préciser la nature de certains points singuliers des intégrales de l'équation

$$(1.) \qquad \Delta u = e^u, \quad (\text{on peut supposer } k = 1)$$

qui seront les seuls que nous aurons à considérer dans cette étude.

*) J'en ai déjà indiqué la substance dans le Bulletin des Sciences Mathématiques de M. *Darboux* (Septembre 1900).

En désignant par r la distance du point (x, y) à l'origine, et β représentant une constante, posons

$$u = \beta \log r + v.$$

L'équation précédente devient alors

$$\Delta v = r^\beta . e^v. \tag{2.}$$

Il est facile de voir, en procédant par approximations successives, que si

$$\beta > -2$$

il existe des intégrales de l'équation (2.) continues autour du point O et *au point O lui-même.* On prend à cet effet un contour C suffisamment petit autour de l'origine, et l'on considère les équations successives

$$\Delta v_0 = r^\beta,$$
$$\Delta v_1 = r^\beta . e^{v_0},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\Delta v_n = r^\beta . e^{v_{n-1}}$$

tous les v prenant une même succession de valeurs données sur le bord C. On établit sans peine que *dans le cas où* β *est supérieur à* -2, et si le contour est suffisament petit, la limite de v_n donne une intégrale de (2.) prenant les valeurs données sur C et continue même à l'origine.

2. Il est intéressant de rechercher ce que deviennent les dérivées premières $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ à l'origine. On voit de suite qu'elles sont, comme v, continues à l'origine quand β est supérieur à -1, mais il en est autrement si β est compris entre -1 et -2.

Pour le voir, et nous rendre compte de la forme de v et de ses dérivées premières au voisinage de l'origine, prenons d'abord le cas très simple où le contour C serait circulaire et où les valeurs données seraient nulles. Dans ce cas, v ne dépend que de r, et nous avons l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} = r^\beta . e^v$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) = r^{\beta+1} . e^v$$

et, par suite,

$$r\frac{d\nu}{dr} = \int_{r_0}^{r} r^{\beta+1}.e^{\nu}\,dr + C. \qquad (r_0 \neq 0)$$

Nous nous plaçons toujours dans l'hypothèse $\beta > -2$; l'intégrale du second membre a alors une valeur finie pour $r = 0$. Par suite, $r\frac{d\nu}{dr}$ tend vers une valeur finie pour $r = 0$. Je dis que cette valeur finie ne peut être que zéro. Soit en effet

$$r\frac{d\nu}{dr} = \varphi(r).$$

Si $\varphi(0)$ n'est pas nul, on déduit de cette relation

$$\nu = \varphi(r_1)\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r} + C' \qquad (r < r_1 < r_0)$$

et, par suite, ν serait infini pour $r = 0$. On peut aller plus loin; on a, d'après ce qui précède,

$$r\frac{d\nu}{dr} = \int_{r_0}^{r} r^{\beta+1}.e^{\nu}\,dr - \int_{r_0}^{0} r^{\beta+1}.e^{\nu}\,dr = \int_{0}^{r} r^{\beta+1}.e^{\nu}\,dr;$$

nous pouvons donc écrire

$$r\frac{d\nu}{dr} = e^{\nu'}\frac{r^{\beta+2}}{\beta+2},$$

ν' étant la valeur de ν pour une valeur comprise entre 0 et r. Nous concluons de là que $\frac{d\nu}{dr}$ *est de la forme*

$$r^{\beta+1}.M,$$

M restant fini pour $r = 0$, et enfin ν *sera de la forme*

$$\nu_0 + r^{\beta+2}.M_1 \quad (\nu_0 \text{ étant une constante}),$$

M restant fini pour $r = 0$.

Ce que nous venons de trouver pour ce cas particulier est général. Les approximations successives montrent que, pour toutes les solutions trouvées au paragraphe précédent, les dérivées partielles $\frac{\partial \nu}{\partial x}$ et $\frac{\partial \nu}{\partial y}$ sont autour de l'origine de la forme

$$r^{\beta+1}.M$$

et ν est de la forme

$$\nu_0 + r^{\beta+2}.M_1,$$

M et M_1 restant finis pour $r = 0$.

3. Nous venons de considérer le cas d'un point singulier à distance finie. On peut supposer le point singulier à l'infini. Il suffit de faire une inversion en posant

$$x' + iy' = \frac{1}{x + iy}.$$

L'équation

$$\Delta u = e^u$$

devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = \frac{1}{r'^4} e^u. \qquad (r'^2 = x'^2 + y'^2)$$

Au lieu du point à l'infini dans le plan (x, y), nous avons le point *zéro* dans le plan (x', y'). En posant

$$u = \alpha \log r' + \nu,$$

l'équation précédente devient

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y'^2} = r'^{\alpha-4}.e^\nu.$$

Donc, pour avoir un point singulier de la nature de ceux considérés plus haut, il faudra que

$$\alpha - 4 > -2 \quad \text{ou} \quad \alpha > 2.$$

II.

4. Envisageons maintenant, si elle existe, une intégrale de l'équation

$$\Delta u = e^u$$

ayant comme points singuliers du type précédent n points à distance finie $O_1, O_2, \ldots O_n$ correspondant aux coefficients $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ $(\beta_i > -2)$, et avec la condition supplémentaire relative aux dérivées du premier ordre telle qu'elle est exprimée au § 2. De plus, le point à l'infini est un point singulier de même nature, et il lui correspond l'exposant α envisagé au § 3.

Il doit tout d'abord exister entre α et les β une inégalité nécessaire. Considérons, en effet, n petits cercles décrits autour de $O_1, O_2, \ldots O_n$ et un

cercle d'un très grand rayon. Portons notre attention sur la portion du plan extérieure aux petits cercles et intérieure au grand cercle: de l'équation

$$\Delta u = e^u$$

on tire

$$\iint \Delta u \, dx \, dy = \iint e^u \, dx \, dy > 0,$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire envisagée. Par conséquent, d'après la formule de Green,

$$\int \frac{du}{dn} ds < 0,$$

la dérivée étant prise dans le sens de la normale intérieure. Or on a, pour le voisinage de O_1,

$$u = \beta_1 \log r_1 + \nu$$

et $\frac{d\nu}{dn}$ est de l'ordre de $r_1^{\beta+1}$. Il en résulte de suite que, dans l'inégalité précédente, la part des petites circonférences est représentée par

$$2\pi(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n).$$

On voit aussi facilement que la part de la très grande circonférence est

$$2\pi\alpha$$

et l'on a, par suite, *l'inégalité nécessaire que nous voulions obtenir*

$$\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_n < 0.$$

Nous savons d'ailleurs que $\alpha > 2$, $\beta_i > -2$.

III.

5. Nous allons maintenant démontrer qu'*il ne peut y avoir deux intégrales jouissant des propriétés indiquées.* Supposons qu'il existe deux telles intégrales u et ν, et soit

$$u = \nu + h.$$

Il n'est tout d'abord pas possible que h soit constamment positif, car de la relation

$$\Delta h = e^\nu (e^h - 1)$$

on conclut, en envisageant le même contour que plus haut,

$$\iint \Delta h \, dx\, dy = \iint e^v (e^h - 1) \, dx\, dy > 0;$$

par conséquent,

$$\int \frac{dh}{dn} \, ds < 0,$$

l'égalité étant exclue.

Or ce résultat est impossible, car $\frac{dh}{dn}$ dans le voisinage de O_i étant de l'ordre de $r_i^{\beta_i+1}$, l'intégrale du premier membre relative à chacune des circonférences O_i tend vers zéro, et il en est de même pour la grande circonférence pour une raison analogue. *Donc la différence h ne peut être toujours positive.*

Démontrons en second lieu un lemme qui nous sera d'ailleurs très utile tout à l'heure. J'envisage un contour C contenant l'origine, et l'équation

$$\text{(E.)} \qquad \Delta h = A(x, y) . r^\beta . (e^h - 1), \qquad (\beta > -2)$$

où $A(x, y)$ est une fonction *positive* et *continue* dans C. Je dis que si une intégrale h de cette équation partout continue dans C (avec la condition que les dérivées du premier ordre soient autour de l'origine de l'ordre de $r^{\beta+1}$) prend sur C des valeurs comprises entre $-M$ et $+M$, *on aura à l'intérieur de C*

$$\text{(3.)} \qquad |h| < M.$$

Si le facteur r^β ne se trouvait pas dans le second membre de l'équation, la remarque serait immédiate, car une intégrale de l'équation n'aurait nulle part, dans C, ni maximum positif, ni minimum négatif, mais ici cette conclusion pourrait cesser d'être exacte pour l'origine, et le raisonnement ne pourrait pas alors se terminer. Nous allons montrer d'abord que si h est nul sur C, il est nécessairement nul dans C; on peut supposer que h est toujours de même signe dans C (sinon on fractionnerait l'aire en plusieurs autres). Soit donc $h > 0$ dans C; en intégrant entre C et un petit cercle Γ ayant l'origine pour centre, on a

$$\iint \Delta h . dx\, dy = \iint A . r^\beta . (e^h - 1) \, dx\, dy > 0$$

et par suite

$$\int_\Gamma \frac{dh}{dn} \, ds + \int_C \frac{dh}{dn} \, ds < 0 \quad \text{(égalité exclue)},$$

n représentant la normale intérieure à l'aire. La première intégrale est très petite, la seconde est positive ou nulle comme chacun de ces éléments: il y a donc contradiction.

Il résulte de là qu'une intégrale de E positive sur C ne pourra pas devenir négative à l'intérieur, et que si l'on a pour deux intégrales h_1 et h_2

$$h_1 > h_2 \quad (\text{sur } C),$$

il en sera de même à l'intérieur. Pour achever alors la démonstration de l'inégalité (3.), il suffit de considérer l'intégrale h_1 de E prenant la valeur M sur C; h_1 sera toujours positif dans C, mais l'égalité

$$\Delta(h_1 - M) = A \,.\, r^\beta \,.\, (e^h - 1)$$

montre que $h_1 - M$ est négatif dans C. Or l'intégrale h prenant sur C des valeurs inférieures à M est, d'après ce que nous venons de dire, inférieure à h_1; on a, par suite,

$$h < h_1 < M;$$

on démontrerait de même l'inégalité

$$h > -M,$$

et *l'inégalité* (3.) *est établie.*

6. Arrivons maintenant à la démonstration du théorème énoncé au début du paragraphe précédent. Soit ε une constante réelle quelconque comprise entre le maximum positif et le minimum négatif de h; il y aura nécessairement une succession de points formant une courbe continue pour laquelle

$$h = \varepsilon.$$

En effet, h a nécessairement, d'après ce qui a été dit plus haut, son maximum positif et son minimum négatif en un point singulier. Soit le maximum en O et le minimum en O' (O et O' sont deux des points singuliers $O_1, O_2, \ldots O_n$ et ∞). Sur toute ligne joignant O à O' il y a au moins un point où $h = \varepsilon$, et par suite nous avons une courbe

$$h = \varepsilon$$

formée d'une ou plusieurs parties fermées. A l'intérieur d'une branche fermée de cette courbe h sera compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$; mais il est clair qu'ici, considérant le plan tout entier (où la sphère si l'on aime mieux), il n'y a

pas lieu de distinguer entre *intérieur* et *extérieur*. Par suite h sera partout compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, ce qui est évidemment impossible puisque ε peut être pris aussi petit que l'on veut; il faut donc que h soit identiquement nul, *et les solutions u et v coïncident.*

IV.

7. Il faut maintenant établir l'existence de la solution. Deux lemmes nous seront nécessaires. Le premier est le plus délicat; je l'expose d'abord dans le cas le plus simple. Soient deux intégrales u et v de l'équation $\Delta u = e^u$ sans singularités dans un contour C. On suppose que sur ce contour on ait, en valeurs relatives,

$$v > G, \quad u - v > 0.$$

Alors, à l'intérieur du contour, on aura nécessairement

$$v > G', \qquad u - v > 0,$$

G' étant une constante dépendant de G. Nous supposons maintenant de plus que l'on ait sur C

$$u - v < M;$$

nous voulons montrer qu'en un point A, intérieur à C, on aura

$$u - v < Mq,$$

q étant un nombre inférieur à *un*, dépendant en général de G et de la position de A, *mais nullement de M.*

Pour établir ce résultat, considérons en posant

$$u - v = h$$

l'équation

(4.) $$\Delta h = e^v (e^h - 1).$$

Elle peut s'écrire

(5.) $$\Delta h = e^v . e^{\theta h} . h = c . h, \qquad (0 < \theta < 1)$$

c étant une fonction positive supérieure à $e^{G'}$. Or il est immédiat*) que

*) Considérons en effet l'intégrale h_1 de l'équation

$$\Delta h = ch$$

prenant la valeur *un* sur le bord; elle prendra au point A la valeur q *plus petite* que

pour une équation linéaire

$$\Delta h = ch, \qquad (c > 0)$$

si l'intégrale h, positive dans C, est sur C au plus égale à M, on aura en un point A

$$h < Mq; \qquad (q < 1)$$

et pour une seconde équation linéaire

$$\Delta h = c' h, \qquad (0 < c' < c)$$

la valeur de q sera supérieure à celle qui correspond à la première équation.

Il suffit d'appliquer ce résultat à l'équation (5.) qui n'est que l'équation (4.), pour en déduire qu'en A on aura

$$h < Mq,$$

q étant un nombre fixe inférieur à l'unité, pouvant dépendre seulement de G et de la position de A, mais nullement de M. Tel est le premier lemme que nous voulions établir.

8. Sous cette forme, ce lemme serait trop restreint. Nous devons l'étendre à des circonstances plus générales. Supposons que dans C il y ait

---

l'unité (c étant positif et non identiquement nul). Soit h l'intégrale prenant sur C des valeurs entre 0 et M; on a

$$\Delta(h_1 M - h) = c(h_1 M - h).$$

Or $h_1 M - h$ est positif sur C, donc à l'intérieur on a

$$h < h_1 M < Mq.$$

Pour démontrer la seconde partie, il faut considérer les deux intégrales respectives h_1 et h'_1 des équations

$$\Delta h_1 = ch_1, \qquad \Delta h'_1 = c'h'_1 \qquad (c' < c)$$

prenant la valeur *un* sur le bord; on doit montrer que

$$h'_1 > h_1 \qquad (\text{en } A).$$

Il suffit d'écrire la relation

$$\Delta(h'_1 - h_1) = c'(h'_1 - h_1) + (c' - c)h_1;$$

elle montre que $h'_1 - h_1$ ne peut avoir un minimum négatif, car pour ce minimum le second membre serait négatif, tandis que le premier membre serait positif ou nul. Il en résulte que $h'_1 - h_1$ est positif à l'intérieur de C.



un point singulier O (à l'origine par exemple) de la nature de ceux que nous avons seulement à considérer dans notre problème. En posant

$$u = \beta \log r + v \qquad (\beta > -2)$$

on a l'équation

$$\Delta v = r^\beta . e^v .$$

C'est à cette équation que nous voulons étendre le lemme établi au paragraphe précédent pour $\Delta u = e^u$.

Nous considérons donc pour l'équation que nous écrivons maintenant

$$\Delta u = r^\beta . e^u$$

deux intégrales u et v partout continues à l'intérieur de C, ayant un point singulier à l'origine du type connu et satisfaisant aux diverses inégalités écrites au début du § 7. On a, en posant toujours

$$u - v = h,$$

$$\Delta h = r^\beta . e^v . (e^h - 1).$$

Traçons autour de l'origine un petit contour Γ. En tout point intérieur à C et par conséquent sur Γ (d'après le § 5), h sera inférieur à M. Or l'équation précédente peut s'écrire

$$\Delta h = r^\beta . e^v . e^{\theta h} . h.$$

Donc, en un point A intérieur à C, on aura

$$h < Mq,$$

q étant une constante inférieure à l'unité, pouvant seulement dépendre de G, mais pas de M.

Au lieu de l'équation $\Delta u = r^\beta . e^u$, on peut envisager d'une manière plus générale l'équation

$$\Delta u = r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \cdots r_n^{\beta_n} . e^u,$$

$r_1, r_2, \ldots r_n$ désignant les distances du point (x, y) à $O_1, \ldots O_n$, et *le lemme garde le même énoncé.*

9. Passons au second lemme qui est immédiat. Soit l'équation

$$\Delta v = r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \cdots r_n^{\beta_n} . e^v,$$

cercle d'un très grand rayon. Portons notre attention sur la portion du plan extérieure aux petits cercles et intérieure au grand cercle; de l'équation

$$\Delta u = e^u$$

on tire

$$\iint \Delta u \, dx \, dy = \iint e^u \, dx \, dy > 0,$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire envisagée. Par conséquent, d'après la formule de *Green*,

$$\int \frac{du}{dn} \, ds < 0,$$

la dérivée étant prise dans le sens de la normale intérieure. Or on a, pour le voisinage de O_1,

$$u = \beta_1 \log r_1 + v$$

et $\frac{dv}{dn}$ est de l'ordre de $r_1^{\beta+1}$. Il en résulte de suite que, dans l'inégalité précédente, la part des petites circonférences est représentée par

$$2\pi(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n).$$

On voit aussi facilement que la part de la très grande circonférence est

$$2\pi\alpha$$

et *l'on a, par suite, l'inégalité nécessaire que nous voulions obtenir*

$$\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_n < 0.$$

Nous savons d'ailleurs que $\alpha > 2$, $\beta_i > -2$.

III.

5. Nous allons maintenant démontrer qu'*il ne peut y avoir deux intégrales jouissant des propriétés indiquées.* Supposons qu'il existe deux telles intégrales u et v, et soit

$$u = v + h.$$

Il n'est tout d'abord pas possible que h soit constamment positif, car de la relation

$$\Delta h = e^v(e^h - 1)$$

U_1 prend sur C les valeurs

$$H - \beta_1 \log r_1 - \cdots - \beta_n \log r_n.$$

Si H est assez petit en valeur relative, en désignant par

$$\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n,$$

les fonctions harmoniques continues dans C et prenant sur C les valeurs

$$\log r_1, \quad \log r_2, \dots \log r_n,$$

on pourra écrire d'après le second lemme

$$U_1 = H - \beta_1 \varrho_1 - \cdots - \beta_n \varrho_n - \eta,$$

la fonction η étant positive et moindre qu'un nombre donné à l'avance ε. On sait que l'on a

$$\varrho_1 = \log \frac{a_1 . MO'_1}{R},$$

O'_1 étant le conjugué de O_1 par rapport à C, et a_1 désignant la distance $\overline{OO_1}$. Nous avons donc

$$u_1 = H + \beta_1 \log r_1 + \cdots + \beta_n \log r_n - \beta_1 \varrho_1 - \cdots - \beta_n \varrho_n - \eta.$$

Sur C', u_1 prend certaines valeurs. Nous envisageons la fonction v_1 satisfaisant à

$$\Delta v = e^v$$

continue en dehors de C', sauf à l'infini, où elle a la singularité correspondant au nombre α. En posant

$$v_1 = -\alpha \log r + V_1,$$

nous avons

$$\Delta V_1 = r^{-\alpha} . e^{V_1}.$$

Sur C', V_1 prend la valeur de l'expression

$$H + \beta_1 \log r_1 + \cdots + \beta_n \log r_n + \alpha \log r - \beta_1 \varrho_1 - \cdots - \beta_n \varrho_n - \eta,$$

qui peut s'écrire

$$H + \beta_1 \log \frac{r_1 . R}{a_1 . MO'_1} + \cdots + \beta_n \log \frac{r_n . R}{a_n . MO'_n} + \alpha \log r - \eta.$$

Transformons cette expression en nous servant des considérations géométriques suivantes. Soit le quotient

$$\frac{r_1 . R}{a_1 . r'_1} \quad (r'_1 = MO'_1).$$

En M sur le cercle C de rayon R, ce quotient est égal à l'unité. L'expression

$$\log \frac{r_1 R}{a_1 r'_1} \tag{6.}$$

est donc nulle pour tout point M du cercle C. Soit $R' = R - \delta$ le rayon du cercle C'' et un point M' sur C'', il est très facile de voir que l'expression (6.) prise pour le point M' peut se développer en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{\delta}{R}$, les coefficients étant eux-mêmes des séries en $\frac{1}{R}$ et dépendant naturellement de la position du point M' sur C''. Ce développement converge pour $\frac{1}{R}$ et $\frac{\delta}{R}$ suffisamment petits; il commence par un terme en $\frac{\delta}{R}$, et de plus le coefficient de $\frac{\delta}{R}$ qui est une série en $\frac{1}{R}$ a comme premier terme -1. Soit donc en M'

$$\log \frac{r_1 R}{a_1 r'_1} = (-1 + \cdots) \frac{\delta}{R} + k_1 \frac{\delta^2}{R^2} + \cdots.$$

On a, d'autre part,

$$\log \frac{R'}{R} = -\frac{\delta}{R} + \frac{\delta^2}{2R^2} + \cdots.$$

Donc, on aura

$$\log \frac{r_1 R}{a_1 r'_1} = \log \frac{R'}{R} + h_1 \frac{\delta}{R},$$

h_1 étant une série en $\frac{1}{R}$ et $\frac{\delta}{R}$ qui ne renferme pas de terme constant.

Ceci posé, nous pouvons donner à la valeur de V_1 sur C' la forme suivante

$$H + (\beta_1 + \cdots + \beta_n) \log \frac{R'}{R} + \alpha \log r + \frac{\delta}{R} \Sigma \beta_1 h_1 - \eta.$$

Donc, d'après le second lemme, la valeur de V_1 sur C sera

$$H + (\beta_1 + \cdots + \beta_n) \log \frac{R'}{R} + \alpha \log R' + v' - \eta',$$

η' étant une fonction positive très petite, si H a été pris assez petit en valeur

relative, et v' désignant une fonction harmonique régulière à l'extérieur de C', et prenant sur C' la valeur

$$(7.) \qquad \frac{\delta}{R} \Sigma \beta_1 h_1 - \eta.$$

Enfin sur C, v_1 aura la valeur

$$H + (\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_n) \log \frac{R'}{R} + v' - \eta'.$$

Or v' est de l'ordre de grandeur de l'expression (7.). Donc, si $\frac{1}{R}$ est suffisamment petit (δ étant une quantité finie quelconque), et si H a été pris assez petit en valeur relative, on peut affirmer que le signe de

$$(\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_n) \log \frac{R'}{R} + v' - \eta'$$

est le signe *plus*, à cause de l'inégalité

$$\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_n < 0,$$

car le terme en $\frac{1}{R}$ a pour coefficient

$$-(\alpha + \beta_1 \cdots + \beta_n).\delta.$$

Nous arrivons donc à l'importante conclusion que v_1 sur C est *supérieur* à H, c'est-à-dire à la valeur de u_1 sur cette même courbe. On se sert des valeurs de v_1 sur C pour former une fonction u_2 prenant les mêmes valeurs sur C, satisfaisant à l'équation

$$\Delta u = e^u$$

et ayant les singularités $O_1, O_2, \ldots O_n$. De u_2 on passe à une fonction v_2; or, puisque

$$u_2 > u_1 \qquad \text{(sur } C\text{)}$$

il en résulte que

$$v_2 > v_1 \qquad \text{(sur } C''\text{)}$$

et par suite

$$v_2 > v_1 \qquad \text{(sur } C\text{)}.$$

Or on se sert de v_2 pour former u_3, toujours d'après le même mécanisme; on aura donc

$$u_3 > u_2 \qquad \text{(sur } C\text{)}.$$

Les u_i comme les v_i vont donc toujours en croissant, et le premier lemme peut être appliqué sous la forme que nous lui avons donnée plus haut (§ 8), car si l'on pose

$$u_i = \beta_1 \log r_1 + \cdots + \beta_n \log r_n + U_i,$$

on aura pour U_i l'équation différentielle

$$\Delta U_i = r_1^{\beta_1} \ldots r_n^{\beta_n} e^{U_i}.$$

Les u_i restant sur C supérieurs à un nombre fixe, il en sera évidemment de même des U_i sur C. Il est clair, d'autre part, que l'on aura

$$U_i > U_{i-1} \qquad (\text{sur } C).$$

Toutes les conditions du lemme premier sont donc vérifiées et la démonstration s'achève immédiatement.

Über den *Eisenstein*schen Satz von dem Charakter der Koeffizienten der Reihenentwicklungen algebraischer Funktionen.

Von Herrn *Leo Koenigsberger* in Heidelberg.

Ohne auf eine Besprechung der Einzelheiten der von *Eisenstein* in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1852 nur flüchtig angedeuteten Sätze und der sich an diese anschließenden Bemerkungen von *Heine* und *Hermite* näher einzugehen, sollen hier diejenigen allgemeinen funktionentheoretischen Sätze kurz entwickelt werden, von denen die Resultate der bezeichneten Arbeiten nur ganz spezielle Fälle bilden.

Ist eine Funktion y von x durch die Gleichung definiert

$$(1.)\quad f(x,y) = \varphi_0(x)\,y^n + \varphi_1(x)\,y^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(x)\,y + \varphi_n(x) = 0,$$

deren Koeffizienten in der Umgebung eines Wertes $x=\xi$ den Charakter ganzer Funktionen haben mögen, so wird sich dieselbe in der Form

$$(2.)\quad \begin{cases} f(x,y) = (a_0 + a_1(x-\xi) + a_2(x-\xi)^2 + \cdots)\,y^n \\ \qquad + (b_0 + b_1(x-\xi) + b_2(x-\xi)^2 + \cdots)\,y^{n-1} \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad + (m_0 + m_1(x-\xi) + m_2(x-\xi)^2 + \cdots)\,y \\ \qquad + (n_0 + n_1(x-\xi) + n_2(x-\xi)^2 + \cdots) = 0 \end{cases}$$

darstellen lassen, und es werden die dem Werte $x=\xi$ zugehörigen Werte von y durch die Gleichung bestimmt sein

$$(3.)\quad a_0 y^n + b_0 y^{n-1} + \cdots + m_0 y + n_0 = 0.$$

Wird zunächst eine einfache und endliche Lösung der Gleichung (3.) mit η_1 bezeichnet, ist also

$$(4.)\qquad \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{\xi,\eta} = m a_0 \eta_1^{m-1} + (m-1) b_0 \eta_1^{m-2} + \cdots + m_0$$

von Null verschieden, so wird sich y in der Umgebung von $x=\xi$ in eine Potenzreihe von der Form entwickeln lassen

$$(5.)\qquad y = \eta_1 + \frac{x-\xi}{1!}(y')_\xi + \frac{(x-\xi)^2}{2!}(y'')_\xi + \cdots,$$

deren Koeffizienten aus den Gleichungen

$$(6.)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\xi,\eta} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\xi,\eta}(y')_\xi = 0,$$

$$(7.)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\xi,\eta} + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{\xi,\eta}(y')_\xi + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\xi,\eta}(y')_\xi^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\xi,\eta}(y'')_\xi = 0$$

usw. bestimmt werden, und es wird sich nunmehr darum handeln, die Eigenschaft der Werte dieser Koeffizienten in Beziehung zu den Koeffizienten der Gleichung (2.) zu ermitteln.

Nach einem früher*) von mir entwickelten Gesetze ergeben sich die Ableitungen der Funktion y der Gleichung (1.) aus der Relation

$$(8.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\substack{n_1, n_2, \dots n_{\varrho-1} \geqq 0 \\ n_1 + 2n_2 + \cdots + (\varrho-1) n_{\varrho-1} = \varrho}} A_{n_1, n_2, \dots n_{\varrho-1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)^{n_1} \frac{\partial^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}} f}{\partial y^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}}} y''^{n_2} y'''^{n_3} \dots y^{(\varrho-1)^{n_{\varrho-1}}} \\ &\qquad + \frac{\partial f}{\partial y} y^{(\varrho)} = 0, \end{aligned}\right.$$

in welcher die Differentialquotienten in bekannter symbolischer Weise aufzufassen und die Koeffizienten durch den Ausdruck bestimmt sind

$$(9.)\qquad A_{n_1, n_2, \dots n_{\varrho-1}} = \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \dots n_{\varrho-1}!}\, \frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}(3!)^{n_3}\dots(\varrho-1!)^{n_{\varrho-1}}}.$$

Da sich aus den Gleichungen (6.) und (7.), wie unmittelbar aus (2.) zu ersehen,

$$\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\xi,\eta}(y')_\xi \quad \text{und} \quad \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3_{\xi,\eta}(y'')_\xi$$

*) „Über das Bildungsgesetz der höheren Differentiale einer Funktion von Funktionen", Mathematische Annalen Bd. 27.

als ganze und ganzzahlige Funktionen von ξ, η und den Koeffizienten der Gleichung (2.) ergeben, so wird es, um die Allgemeingültigkeit dieser Eigenschaft zu erweisen, nur nötig sein zu zeigen, daß, wenn für

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\xi,\eta} = \varkappa \tag{10.}$$

die Größen

$$\frac{\varkappa}{1!}(y')_\xi = G_1, \quad \frac{\varkappa^3}{2!}(y'')_\xi = G_2, \ldots \quad \frac{\varkappa^{2\varrho-3}}{(\varrho-1)!}(y^{(\varrho-1)})_\xi = G_{\varrho-1} \tag{11.}$$

ganze und ganzzahlige Funktionen von ξ, η und den Koeffizienten der Gleichung (2.) sind, diese Eigenschaft auch für den Ausdruck

$$\frac{\varkappa^{2\varrho-1}}{\varrho!}(y^{(\varrho)})_\xi$$

erhalten bleibt.

Nun geht aber aus (8.), (9.), (10.) und (11.) hervor, daß

$$\begin{aligned}
-\frac{\varkappa^{2\varrho-1}}{\varrho!}(y^{(\varrho)})_\xi &= \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots n_{\varrho-1} \geqq 0 \\ n_1+2n_2+\cdots+(\varrho-1)n_{\varrho-1}=\varrho}} \frac{1}{n_1!\, n_2! \ldots n_{\varrho-1}!} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\varkappa + \frac{\partial f}{\partial y}G_1\right)^{n_1} \frac{\partial^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}} f}{\partial y^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}}}\right]_{\xi,\eta} \\
&\qquad\qquad \times \varkappa^{n_1+n_2+\cdots+n_{\varrho-1}-2} G_2^{n_2} G_3^{n_3} \ldots G_{\varrho-1}^{n_{\varrho-1}} \\
&= \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots n_{\varrho-1} \geqq 0 \\ n_1+2n_2+\cdots+(\varrho-1)n_{\varrho-1}=\varrho}} \frac{1}{n_1!\, n_2! \ldots n_{\varrho-1}!} \left[\frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots+n_{\varrho-1}} f}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2+\cdots+n_{\varrho-1}}}\varkappa^{n_1} + \frac{n_1}{1!} \frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots+n_{\varrho-1}} f}{\partial x^{n_1-1} \partial y^{n_2+\cdots+n_{\varrho-1}+1}}\varkappa^{n_1-1} G_1\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{n_1(n_1-1)}{2!} \frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots+n_{\varrho-1}} f}{\partial x^{n_1-2} \partial y^{n_2+\cdots+n_{\varrho-1}+2}} \varkappa^{n_1-2} G_1^2 + \cdots\right]_{\xi,\eta} \\
&\qquad\qquad \times \varkappa^{n_1+n_2+\cdots+n_{\varrho-1}-2} G_2^{n_2} G_3^{n_3} \ldots G_{\varrho-1}^{n_{\varrho-1}}
\end{aligned} \tag{12.}$$

ist, ferner ist ersichtlich, daß der Exponent $n_1 + n_2 + \cdots + n_{\varrho-1} - 2$ von $\varkappa$ eine positive ganze Zahl ist, die auch Null sein kann, und daß wegen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n_2! \ldots n_{\varrho-1}!} \frac{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-\mu+1)}{1.2\ldots\mu} \frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots+n_{\varrho-1}}(x^p y^q)}{\partial x^{n_1-\mu} \partial y^{n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}+\mu}} \\
&\frac{(n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1})!}{n_2!\, n_3! \ldots n_{\varrho-1}!} \cdot \frac{p(p-1)\ldots(p-n_1+\mu+1)}{1.2\ldots(n_1-\mu)} \cdot \frac{q(q-1)\ldots(q-n_2-\cdots-n_{\varrho-1}-\mu+1)}{1.2.3\ldots(n_2+n_3+\cdots+n_{\varrho-1}+\mu)} \\
&\qquad \times \frac{(n_2+\cdots+n_{\varrho-1}+\mu)\ldots(n_2+\cdots+n_{\varrho-1}+1)}{1.2\ldots\mu} x^{p-n_1+\mu} y^{q-n_2-n_3-\cdots-n_{\varrho-1}-\mu}
\end{aligned}$$

die rechte Seite der Gleichung (12.) wieder nur ganze und ganzzahlige

Funktionen der Koeffizienten der Gleichung (2.) einschließen wird, sodaß sich unmittelbar das nachfolgende Theorem ergibt:

Wenn die Koeffizienten einer in y algebraischen Gleichung $f(x, y) = 0$ in der Umgebung eines Wertes $x = \xi$ den Charakter von ganzen Funktionen haben, und es ist für einen dem ξ zugehörigen endlichen Wert η von y

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)_{\xi, \eta} = \varkappa$$

von Null verschieden, also η eine einfache Lösung der Gleichung

$$f(\xi, y) = 0,$$

so ist y in der Umgebung von $x = \xi$ in eine Potenzreihe von der Form

$$y = \eta + G_1 \frac{x-\xi}{\varkappa} + G_2 \frac{(x-\xi)^2}{\varkappa^3} + \cdots + G_\nu \frac{(x-\xi)^\nu}{\varkappa^{2\nu-1}} + \cdots$$

entwickelbar, worin $\varkappa, G_1, G_2, \ldots$ ganze und ganzzahlige Funktionen von ξ, η und den Koeffizienten jener Reihen sind, welche in $f(x, y)$ die Koeffizienten der einzelnen y-Potenzen darstellen.

Welche Form man hiernach dem von *Eisenstein* für algebraische Funktionen mit rationalen Zahlenkoeffizienten ausgesprochenen Satze zu geben hat, ist unmittelbar ersichtlich.

Ist dagegen

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)_{\xi, \eta} = 0, \tag{13.}$$

so mögen zunächst die in der Umgebung von $x = \xi$ eindeutigen und mehrdeutigen Zweige der Funktion auseinandergehalten werden, welche in diesem Punkte den gemeinsamen Wert η annehmen.

Nehmen wir an, daß η nur eine doppelte Lösung der Gleichung (3.) ist, also

$$f(x, y)_{\xi, \eta} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\xi, \eta} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\xi, \eta} \neq 0, \tag{14.}$$

so wird die Gleichung (6.) unter der Voraussetzung, daß der entsprechende Zweig der Funktion um $x = \xi$ herum eindeutig ist, und die Ableitungen von y somit für $x = \xi$ sämtlich endlich sind,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\xi,\eta}=0$$

ergeben, und die dem Wertepaare $x=\xi$, $y=\eta$ zugehörigen Werte von y' nach (7.) die Lösungen der quadratischen Gleichung sein

$$(15.)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\xi,\eta}+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{\xi,\eta}(y')_\xi+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\xi,\eta}(y')_\xi^2=0,$$

deren Koeffizienten ganze und ganzzahlige Funktionen von ξ,η und den Koeffizienten der Gleichung (2.) sind. Unter der Annahme, daß die Lösungen dieser quadratischen Gleichung verschieden sind und eine derselben mit η_1 bezeichnet wird, ergibt sich aus der für $\rho=3$ aus (8.) hervorgehenden Beziehung

$$(16.)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}y'+3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}y'^2+\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}y'^3\\ \qquad\qquad +3\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'\right)y''+\dfrac{\partial f}{\partial y}y'''=0,\end{cases}$$

wenn

$$(17.)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{\xi,\eta}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\xi,\eta}\eta_1=\varkappa_1$$

gesetzt wird, wie aus den durch die Differentiation hinzutretenden Zahlenfaktoren ersichtlich,

$$(18.)\quad \frac{\varkappa_1}{2!}(y'')_\xi=-\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{\xi,\eta}+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_{\xi,\eta}\eta_1+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^2+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^3\right\}$$

als ganze und ganzzahlige Funktion von ξ,η,η_1 und der Koeffizienten der Gleichung (2.).

Da nun ferner aus (8.)

$$(19.)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}+4\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}y'+6\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}y'^2+4\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}y'^3+\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4}y'^4\\ \qquad +6\left(\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+2\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}y'+\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}y'^2\right)y''\\ \qquad\qquad +4\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'\right)y'''+3\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}y''^2+\dfrac{\partial f}{\partial y}y^{\text{IV}}=0\end{cases}$$

folgt, so ist wieder unmittelbar ersichtlich, daß

$$(20.)\quad \begin{cases} \frac{\varkappa_1^3}{3!}(y''')_\xi = -\frac{\varkappa_1^2}{4!}\Big[\Big(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\Big)_{\xi,\eta} + 4\Big(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\Big)_{\xi,\eta}\eta_1 \\ \qquad + 6\Big(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\Big)_{\xi,\eta}\eta_1^2 + 4\Big(\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\Big)_{\xi,\eta}\eta_1^3 + \Big(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\Big)_{\xi,\eta}\eta_1^4\Big] \\ \qquad - \frac{\varkappa_1}{2!}\Big[\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\Big)_{\xi,\eta} + 2\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\Big)_{\xi,\eta}\eta_1 + \Big(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\Big)_{\xi,\eta}\eta_1^2\Big]\frac{\varkappa_1}{2!}(y'')_\xi \\ \qquad\qquad - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)_{\xi,\eta}\Big(\frac{\varkappa_1}{2!}(y'')_\xi\Big)^2 \end{cases}$$

eine ganze und ganzzahlige Funktion der Größen ξ, η, η_1 und der Koeffizienten der Gleichung (2.) ist, und somit, genau wie oben, wenn

$$(21.)\qquad \frac{\varkappa_1}{2!}(y'')_\xi = g_2, \quad \frac{\varkappa_1^3}{3!}(y''')_\xi = g_3, \ldots \frac{\varkappa_1^{2\nu-3}}{\nu!}(y^{(\nu)})_\xi = g_\nu, \ldots$$

gesetzt wird, $g_2, g_3, \ldots g_\nu, \ldots$ ganze und ganzzahlige Funktionen eben jener Größen.

Für die durch die Gleichung (2.) definierte Funktion y von x, welche für $x = \xi$ den Wert η annimmt und sich in der Umgebung von $x = \xi$ durch eine Potenzreihe darstellen läßt, wird, wenn η nur eine doppelte Lösung der Gleichung (3.) ist, die Entwicklung von y sich in der Form darstellen

$$(22.)\quad \begin{cases} y = \eta + \eta_1(x-\xi) + g_2\frac{(x-\xi)^2}{\varkappa_1} + g_3\frac{(x-\xi)^3}{\varkappa_1^3} \\ \qquad\qquad + g_4\frac{(x-\xi)^4}{\varkappa_1^5} + \cdots + g_\nu\frac{(x-\xi)^\nu}{\varkappa_1^{2\nu-3}} + \cdots, \end{cases}$$

worin η_1 eine der beiden als verschieden vorausgesetzten Lösungen der quadratischen Gleichung (15.) ist, deren Koeffizienten ganz und ganzzahlig aus ξ, η und den Koeffizienten der Gleichung (2.) zusammengesetzt sind, $\varkappa_1$ durch den Ausdruck (17.) definiert ist, und $\varkappa_1, g_2, g_3, \ldots$ ganze und ganzzahlige Funktionen eben jener Größen und von η_1 sind.

Hat die quadratische Gleichung (15.) jedoch gleiche Lösungen, ist also auch

$$(23.)\qquad \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big)_{\xi,\eta} + \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)_{\xi,\eta}\eta_1 = 0,$$

so wird vermöge (16.) auch

$$(24.)\quad \Big(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big)_{\xi,\eta} + 3\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\Big)_{\xi,\eta}\eta_1 + 3\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\Big)_{\xi,\eta}\eta_1^2 + \Big(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\Big)_{\xi,\eta}\eta_1^3 = 0,$$

und es wird sich $(y'')_\xi$ nach (19.) als Lösung der quadratischen Gleichung

$$(25.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\xi,\eta}(y'')_\xi^2 + 2\left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{\xi,\eta} + 2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_{\xi,\eta}\eta_1 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^2\right](y'')_\xi \\ \qquad + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_{\xi,\eta} + 4\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\right)_{\xi,\eta}\eta_1 + 6\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^2 \right. \\ \qquad\qquad \left. + 4\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^3 + \left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^4\right] = 0 \end{cases}$$

ergeben, deren Koeffizienten ganz und ganzzahlig aus ξ, η, η_1 und den Koeffizienten der Gleichung (2.) zusammengesetzt sind, und von der wir eine Lösung mit η_2 bezeichnen wollen.

Da aber in der aus (8.) sich ergebenden Beziehung

$$(26.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + 5\frac{\partial^5 f}{\partial x^4 \partial y}y' + 10\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}y'^2 + 10\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}y'^3 + 5\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^4}y'^4 + \frac{\partial^5 f}{\partial y^5}y'^5 \\ \qquad + 10\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} + 3\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}y' + 3\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}y'^2 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}y'^3\right)y'' \\ + 10\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}y' + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}y'^2\right)y''' + 15\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}y'\right)y''^2 \\ \qquad + 5\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'\right)y^{\mathrm{IV}} + 10\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y''y''' + \frac{\partial f}{\partial y}y^{\mathrm{V}} = 0, \end{cases}$$

wenn in ihr $x = \xi$, $y = \eta$ gesetzt wird, der Voraussetzung nach die Koeffizienten von $(y^{\mathrm{IV}})_\xi$, $(y^{\mathrm{V}})_\xi$ verschwinden, so werden sich, wenn der unter der Annahme, daß η_2 eine einfache Lösung der Gleichung (25.) ist, von Null verschiedene Ausdruck

$$(27.)\quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{\xi,\eta} + 2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_{\xi,\eta}\eta_1 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\xi,\eta}\eta_2 = \varkappa_2$$

gesetzt wird, wiederum aus (26.) und den weiteren aus (8.) abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{\varkappa_2}{3!}(y''')_\xi = h_3, \quad \frac{\varkappa_2^3}{4!}(y^{\mathrm{IV}})_\xi = h_4, \ldots \frac{\varkappa_2^{2\nu-5}}{\nu!}(y^{(\nu)})_\xi = h_\nu, \ldots$$

als ganze und ganzzahlige Funktionen von $\xi, \eta, \eta_1, \eta_2$ und der Koeffizienten der Gleichung (2.) ergeben.

Besitzt also die Gleichung (3.) *die Lösung η nur zweifach, sind ferner die beiden Lösungen η_1 der Gleichung* (15.) *einander gleich, die beiden Lösungen η_2 der Gleichung* (25.) *aber verschieden, so wird sich die Entwicklung der in der Umgebung von $x = \xi$ eindeutigen Funktion y in der Form darstellen lassen*

$$y=\eta+\eta_1(x-\xi)+\frac{\eta_2}{2!}(x-\xi)^2+h_3\frac{(x-\xi)^3}{\varkappa_2}+h_4\frac{(x-\xi)^4}{\varkappa_2^3}+\cdots+h_\nu\frac{(x-\xi)^\nu}{\varkappa_2^{2\nu-5}}+\cdots,$$

worin $\varkappa_2$ durch den Ausdruck (27.) *bestimmt ist, η, η_1, η_2 Lösungen von Gleichungen sind, deren Koeffizienten ganz und ganzzahlig resp. aus ξ und den Koeffizienten der Gleichung* (2.), *aus diesen Koeffizienten, ξ und η, endlich aus diesen Koeffizienten, ξ, η und η_1 zusammengesetzt sind, während h_3, h_4, ... ganze und ganzzahlige Funktionen von ξ, η, η_1, η_2 und den Koeffizienten der Gleichung* (2.) *sind.*

Ist η_2 jedoch eine doppelte Lösung der Gleichung (25.), so wird die Gleichung (26.) die Beziehung ergeben

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)_{\xi,\eta}&+5\left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^4\partial y}\right)_{\xi,\eta}\eta_1+10\left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^3\partial y^2}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^2\\ &+10\left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^3+5\left(\frac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^4}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^4+\left(\frac{\partial^5 f}{\partial y^5}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^5\\ +10\Big[\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}\right)_{\xi,\eta}&+3\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right)_{\xi,\eta}\eta_1+3\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^2+\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_{\xi,\eta}\eta_1^3\Big]\eta_2\\ &+15\left(\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_{\xi,\eta}+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{\xi,\eta}\eta_1\right]\eta_2^2=0,\end{aligned}$$

und erst die aus (8.) für $\varrho=6$ hergeleitete Gleichung wird $(y''')_\xi$ als Lösung einer Gleichung zweiten Grades liefern, deren Koeffizienten ganz und ganzzahlig aus ξ, η, η_1, η_2 und den Koeffizienten der Gleichung (2.) zusammengesetzt sind, während sich die Darstellung der Potenzreihe für y genau analog den früheren Formeln ergibt.

Entsprechend gestalten sich, wie unmittelbar ersichtlich, die Resultate, wenn die Größe η eine mehr als doppelte Lösung der Gleichung (3.) ist, und *es werden sich somit für den Fall der Eindeutigkeit der Funktion y, welche in der Umgebung von $x=\xi$ durch die Gleichung* (2.) *definiert ist, für jeden der Zweige Entwicklungen von der Form ergeben*

$$\begin{aligned}y=\eta+\eta_1(x-\xi)+\frac{\eta_2}{2!}(x-\xi)^2+\cdots\\ +\frac{\eta_\mu}{\mu!}(x-\xi)^\mu+\gamma_{\mu+1}\frac{(x-\xi)^{\mu+1}}{\lambda}+\gamma_{\mu+2}\frac{(x-\xi)^{\mu+2}}{\lambda^3}+\cdots,\end{aligned}$$

worin η die Lösung einer ganz und ganzzahlig aus den Koeffizienten der Gleichung (2.) *zusammengesetzten Gleichung, η_1 die Lösung einer aus diesen und η; η_2 die Lösung einer aus diesen, η und η_1; usw. ganz und ganzzahlig*

zusammengesetzten Gleichung, endlich $\gamma_{\mu+1}, \gamma_{\mu+2}, \ldots$ ganz und ganzzahlig aus allen diesen Größen zusammengesetzt sind.

Entsprechen dem Werte $x=\xi$ unendlich große Werte von y, ist also mindestens der erste Koeffizient der Gleichung (3.) gleich Null, so wird, wenn $y=\frac{1}{z}$ gesetzt wird, das entwickelte Theorem für z als Funktion von x gelten, und z durch eine Gleichung von demselben Grade mit denselben Koeffizienten definiert sein, so daß z in der Umgebung von $x=\xi$ eine Entwicklung der oben bezeichneten Form

$$z=\frac{\eta_\varepsilon}{\varepsilon!}(x-\xi)^\varepsilon+\frac{\eta_{\varepsilon+1}}{(\varepsilon+1)!}(x-\xi)^{\varepsilon+1}+\cdots+\frac{\eta_\mu}{\mu!}(x-\xi)^\mu$$
$$+\gamma_{\mu+1}\frac{(x-\xi)^{\mu+1}}{\lambda}+\gamma_{\mu+2}\frac{(x-\xi)^{\mu+2}}{\lambda^3}+\cdots$$

besitzt, und sich danach für y im allgemeinen die Entwicklung nach steigenden Potenzen von $x-\xi$ mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen dieser Größen aus der Form

$$y=\frac{\varepsilon!}{\eta_\varepsilon}(x-\xi)^{-\varepsilon}\Big\{1+\frac{\eta_{\varepsilon+1}}{\eta_\varepsilon}\frac{\varepsilon!}{(\varepsilon+1)!}(x-\xi)+\cdots+\frac{\eta_\mu}{\eta_\varepsilon}\frac{\varepsilon!}{\mu!}(x-\xi)^{\mu-\varepsilon}$$
$$+\frac{\gamma_{\mu+1}}{\eta_\varepsilon}\frac{(x-\xi)^{\mu+1-\varepsilon}}{\lambda}+\frac{\gamma_{\mu+2}}{\eta_\varepsilon}\frac{(x-\xi)^{\mu+2-\varepsilon}}{\lambda^3}+\cdots\Big\}^{-1}$$

ableiten läßt.

Wenn endlich die Gleichung (3.) eine mehrfache Lösung η besitzt, und das zugehörige y im Punkte $x=\xi$ einen r-fachen Verzweigungspunkt hat, so wird die Gleichung (2.) durch die Substitution

$$(x-\xi)^{\frac{1}{r}}=t$$

in die Gleichung desselben Grades m und mit denselben Koeffizienten

$$(a_0+a_1t^r+a_2t^{2r}+\cdots)y^m+(b_0+b_1t^r+b_2t^{2r}+\cdots)y^{m-1}+\cdots$$
$$+(m_0+m_1t^r+m_2t^{2r}+\cdots)y+(n_0+n_1t^r+n_2t^{2r}+\cdots)=0$$

übergehen, und die um $t=0$ herum eindeutige Entwicklung nach dem oben ausgesprochenen Theorem die Form annehmen

$$y=\eta+\eta_1't+\frac{\eta_2'}{2!}t^2+\cdots+\frac{\eta_\varrho'}{\varrho!}t^\varrho+\gamma_{\varrho+1}'\frac{t^{\varrho+1}}{\lambda'}+\gamma_{\varrho+2}'\frac{t^{\varrho+2}}{\lambda'^3}+\cdots,$$

sodaß die Entwicklung der r im Punkte $x=\xi$ einen Zyklus von r Elementen

bildenden Funktionalwerte die Gestalt hat

$$y=\eta+\eta'_1(x-\xi)^{\frac{1}{r}}+\frac{\eta'_2}{2!}(x-\xi)^{\frac{2}{r}}+\cdots+\frac{\eta'_\varrho}{\varrho!}(x-\xi)^{\frac{\varrho}{r}}$$
$$+\gamma'_{\varrho+1}\frac{(x-\xi)^{\frac{\varrho+1}{r}}}{\lambda'}+\gamma'_{\varrho+2}\frac{(x-\xi)^{\frac{\varrho+2}{r}}}{\lambda'^2}+\cdots$$

und die Koeffizienten derselben wieder in der oben angegebenen Weise aus den Koeffizienten der Gleichung (2.) *zusammengesetzt sind.*

Ist z. B. die Gleichung gegeben

$$(1-2x+x^2)y^4+(-8+12x-4x^2)y^3+(18-16x-21x^2+13x^3+6x^4)y^2$$
$$+(-16+4x+38x^2-4x^3-18x^4-4x^5)y$$
$$+(5+2x-18x^2-5x^3+12x^4+7x^5+x^6)=0,$$

die für $x=0$ die Lösung $\eta=5$ einfach und die Lösung $\eta=1$ dreifach besitzt, so wird zunächst für $x=0$, $\eta=5$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{0,5}=\varkappa=64$$

und somit die Entwicklung des zugehörigen Zweiges die Form haben

$$y=5+G_1\frac{x}{64}+G_2\frac{x^2}{64^3}+G_3\frac{x^3}{64^5}+\cdots,$$

worin $G_1, G_2, G_3, \ldots$ ganze Zahlen und zwar

$$G_1=2.64, \qquad G_2=48.64^2, \ldots$$

sind, sodaß sich

$$y=5+2x+\frac{3}{4}x^2+\frac{3.5}{4.6}x^3+\cdots=3+x+\frac{2}{\sqrt{1-x}}$$

ergibt.

Für $x=0$, $\eta=1$ erhält man

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0,1}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{0,1}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{0,1}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{0,1}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{0,1}=0,$$
$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{0,1}=\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_{0,1}=0, \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_{0,1}=16, \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{0,1}=-24,$$

sodaß die Gleichung

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}y'+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}y'^3=0$$

für $y'=\eta_1$ den Wert 2 einfach und den Wert 0 doppelt liefert.

Für $\eta=1$, $\eta_1=2$ folgt aus

$$\varkappa_1=\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_{0,1}+4\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}\right)_{0,1}\eta_1+6\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right)_{0,1}\eta_1^2+4\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\right)_{0,1}\eta_1^3+\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_{0,1}\eta_1^4$$
$$+6\left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_{0,1}+2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_{0,1}\eta_1+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{0,1}\eta_1^2\right]\eta_2,$$

da

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_{0,1}=0,\quad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}\right)_{0,1}=60,\quad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right)_{0,1}=-60,$$
$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\right)_{0,1}=24,\quad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_{0,1}=24,$$

daß $\varkappa_1=-32$ wird, und man erhält wie oben

$$y=1+2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^3+\cdots=1+x+\frac{x}{\sqrt{1-x}}.$$

Geht man aber von der dreifachen Wurzel $\eta=1$ und der doppelten Wurzel $\eta_1=0$ aus, so wird die Gleichung (26.) die in $(y'')_0$ quadratische Gleichung liefern

$$y''^2+\frac{5}{2}y''+\frac{3}{2}=0$$

und somit für η_2 die beiden Werte -1 und $-\frac{3}{2}$; im ersteren Falle folgt aus der für $\varrho=6$ aus (8.) abgeleiteten Formel

$$\varkappa_3=20\left[\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}\right)_{0,1}+3\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right)_{0,1}\eta_1+3\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\right)_{0,1}\eta_1^2+\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_{0,1}\eta_1^3\right]$$
$$+60\left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_{0,1}+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{0,1}\eta_1\right]\eta_2$$

der Wert $\varkappa_3=-240$ und für die Entwicklung dieses Zweiges

$$y=1+x-\frac{x}{\sqrt{1-x}},$$

während der letzte die Form hat

$$y=3+x-\frac{2}{\sqrt{1-x}}.$$

Zur synthetischen Theorie der Raumkurven III. Grades k^3 und der Kongruenz C_3^3 ihrer Schmiegungsstrahlen. Kubische Raumkurven und biquadratische Regelflächen, die bezüglich k^3 autokonjugiert sind.

Von Herrn *Stanislaus Jolles* in Berlin.

1. Bekanntlich bestimmt eine Raumkurve III. Grades k^3 einen Nullraum Σ, in welchem den Punkten von k^3 ihre Schmiegungsebenen als Nullebenen zugeordnet sind. In Σ entspricht jeder Unisekante und jeder eigentlichen und uneigentlichen Bisekante von k^3 eine in einer Schmiegungsebene bezw. in zwei reellen oder konjugiert imaginären Schmiegungsebenen gelegene Gerade, welche Uniplanare bezw. eigentliche oder uneigentliche Biplanare von k^3 genannt werden möge.*) Ist nun P der Nullpunkt einer Ebene π im Nullraume Σ, so fällt nach *Cremona* die harmonische Polare von P bezüglich des Schnittpunktdreiecks von π und k^3 zusammen mit der in π gelegenen Biplanare von k^3.**) Ferner zeigte *Cremona* und fast gleichzeitig *Joachimsthal,* daß eine eigentliche Bisekante nur mit einer uneigentlichen Biplanare von k^3 inzident sein kann.***) *Cremona* und *Joachimsthal*

*) Diese Bezeichnungsweise gestattet sehr leicht in der projektiven Geometrie der Raumkurven und Ebenengewinde die dualen Beziehungen auszusprechen. Den Trisekanten gewisser Raumkurven stehen z. B. die Triplanaren der zu ihnen korrelativen Ebenengewinde gegenüber usf.

**) *Cremona*, Sulle linee del terz' ordine a doppia curvatura. Annali di Matematica, 1. Serie, 2 (1859), S. 21.

***) *Cremona*, Sulle linee del terz' ordine a doppia curvatura. Annali di Matematica, 1. Serie, 1 (1858), S. 167.

Joachimsthal, dieses Journal Bd. 56 (1859), S. 45.

benutzen analytische Hilfsmittel; synthetisch wurde jener Satz aus der Theorie der Raumkurven III. Grades zuerst von *Schröter*,*) dieser von Herrn *Reye***) bewiesen. Doch sind meines Erachtens *Schröters* Darlegungen nur völlig einwandfrei, wenn π mit k^3 drei reelle Punkte gemein hat. Für beide Sätze werden im folgenden einfache synthetische sich aus den Grundeigenschaften von k^3 organisch aufbauende Beweise entwickelt. Hierbei erweist sich der zweite *Cremona*sche Satz ohne weiteres als eine Folgerung eines von *v. Staudt* gefundenen Satzes über konjugierte Ebenen bezüglich einer Raumkurve III. Grades.***)

Diese Entwicklungen eröffnen den Zugang zu einer projektiven Behandlung der von den Schmiegungsstrahlen der Raumkurve III. Grades gebildeten Strahlenkongruenz III. Grades C_3^3. Unter anderem ergeben sich die Strahlen von C_3^3 als Regelstrahlen von ∞^2 Regelscharen IV. Ordnung mit dreifachen Punkten und dreifach berührenden Ebenen. Letztere gehen durch je eine Biplanare, erstere liegen auf je einer Bisekante von k^3. Jede dieser Regelscharen ist perspektiv zu k^3 und je einer zweiten kubischen Raumkurve k_0^3, deren Punkte bezüglich k^3 paarweise konjugiert sind. Diese Kurven mögen deshalb autokonjugiert bezüglich k^3 genannt werden. k^3 ist umgekehrt auch autokonjugiert bezüglich k_0^3. (Ist überhaupt eine kubische Raumkurve c'^3 autokonjugiert bezüglich einer kubischen Raumkurve c^3, so ist c^3 auch autokonjugiert bezüglich c'^3.) Die zu k^3 und k_0^3 perspektive Regelschar IV. Ordnung ist autokonjugiert bezüglich dieser Raumkurven, wie auch bezüglich der sich ihnen anschmiegenden Ebenengewinde. Mit Rücksicht hierauf heißt sie autokonjugiert bezüglich der Raumkurven III. Grades k^3 und k_0^3.

2. Den Punkten und Ebenen eines Schmiegungsstrahles $\mathfrak{a}$ einer Raumkurve III. Grades k^3 sind bezüglich k^3 die Punkte und Ebenen eines Schmiegungsstrahles $\mathfrak{a}'$ von k^3 konjugiert.†) Die Verbindungsgeraden konjugierter Punkte von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ sind Bisekanten, die Schnittgeraden konjugierter Ebenen Biplanaren von k^3. In einer durch $\mathfrak{a}$ gehenden Ebene π liegt sonach

---

*) *Schröter*, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung. Leipzig 1880, S. 288.

**) *Reye*, Die Geometrie der Lage. 2. Abteilung, 2. Auflage, Hannover 1880, S. 101.

***) *v. Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage. Drittes Heft, Nürnberg 1860, S. 322, N. 499.

†) *Cremona*, Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches, Nouvelles Annales de Mathématiques. 2. Serie, 1 (1862), S. 297.

eine Bisekante a und eine Biplanare t von k^3, die sich auf $\mathfrak{a}'$ schneiden, und dieses Ergebnis läßt sich folgendermaßen aussprechen:

> Sind ein Schmiegungsstrahl $\mathfrak{a}$ und eine Bisekante a einer Raumkurve III. Grades k^3 mit einer Ebene π inzident und gehen sie nicht durch denselben Punkt von k^3, so wird die Bisekante a von $\mathfrak{a}$ und der mit π inzidenten Biplanare t von k^3 in konjugierten Punkten bezüglich der Raumkurve geschnitten.

3. Drei reelle Schnittpunkte A, B, C von k^3 mit einer Ebene π bestimmen drei bezw. durch A, B, C gehende in π gelegene Schmiegungsstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. Sie schneiden die den Eckpunkten des Dreiecks ABC bezw. gegenüberliegenden Seiten a, b, c in drei Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, denen bezüglich k^3 bezw. die Punkte $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ konjugiert sind. $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ — $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ — $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ sind als Paare konjugierter Punkte je durch ein Paar Eckpunkte des Dreiecks ABC harmonisch getrennt, und da sich bekanntlich $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in dem π durch k^3 zugewiesenen Nullpunkte P treffen, so liegen $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ auf der harmonischen Polare p von P bezüglich des Dreiecks ABC. Diese ist somit nach **2.** identisch mit der in π gelegenen Biplanare t von k^3.

Wird auf $\mathfrak{a}$ der durch die Punkte $A, \mathfrak{A}$ von P harmonisch getrennte Punkt Q, und dann der von A, Q durch $\mathfrak{A}$ harmonisch getrennte Punkt T bestimmt, so liegt bekanntlich T auf der harmonischen Polare p von P bezüglich des Dreiecks ABC. Die harmonische Polare p von P bezüglich des Dreiecks ABC wird somit auch erhalten als Verbindungsgerade des $\mathfrak{A}$ bezüglich k^3 konjugierten Punktes $\mathfrak{A}'$ mit dem soeben ermittelten Punkte T. Diese Konstruktion von p ist unabhängig davon, ob die von k^3 auf a hervorgerufene Involution konjugierter Punkte hyperbolisch oder elliptisch ist. Sie liefert also auch die harmonische Polare p, wenn B, C konjugiert imaginär sind, nur fragt sich, ob dann p ebenfalls mit der in π gelegenen Biplanare t von k^3 zusammenfällt. Daß p auch dann mit t identisch ist, wird in der folgenden Untersuchung dargetan.

4. Beschreibt π den Ebenenbüschel $[\mathfrak{a}]$ um den Schmiegungsstrahl $\mathfrak{a}$, so durchlaufen die Bisekante a und die Biplanare t bezw. zu $[\mathfrak{a}]$ perspektive Regelscharen II. Ordnung. Die mit π je in einer Ebene gelegenen Strahlen a, t schneiden demnach den Schmiegungsstrahl $\mathfrak{a}$ in homologen Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{T}$ zweier projektiven Punktreihen $[\mathfrak{A}, \ldots]$, $[\mathfrak{T}, \ldots]$, und diese Punktreihen wiederum sind projektiv zu der auf $\mathfrak{a}$ vom Nullpunkte P von π beschriebenen Punktreihe $[P, \ldots]$.

So lange die Schnittpunkte B, C von π mit k^3 reell sind, fällt t mit der harmonischen Polare p von P bezüglich des Dreiecks ABC, sowie $\mathfrak{T}$ mit einem Punkte T zusammen, der nach **3.** ermittelt wird, indem man zunächst den durch die Punkte $A, \mathfrak{A}$ von P harmonisch getrennten Punkt Q aufsucht und dann T als den durch A, Q von $\mathfrak{A}$ harmonisch getrennten Punkt bestimmt. Durchlaufen nun die Punkte $\mathfrak{A}$ und P auf $\mathfrak{a}$ als homologe Punkte die projektiven Punktreihen $[\mathfrak{A}, \ldots]$ und $[P, \ldots]$, so durchläuft der durch die Punkte A, $\mathfrak{A}$ von P harmonisch getrennte Punkt Q die zu jenen Punktreihen projektive Punktreihe $[Q, \ldots]$, und der durch die Punkte A, Q von $\mathfrak{A}$ harmonisch getrennte Punkt T die zu ihnen projektive Punktreihe $[T, \ldots]$. Zur Punktreihe $[\mathfrak{A}, \ldots]$ war nun auch die Punktreihe $[\mathfrak{T}, \ldots]$ projektiv, folglich sind die Punktreihen $[T, \ldots]$, $[\mathfrak{T}, \ldots]$ zu einander projektiv. Homologe Punkte beider projektiven Punktreihen fallen, wie am Anfange dieses Abschnittes hervorgehoben wurde, zusammen, solange π die Raumkurve in drei reellen Punkten schneidet. Somit haben beide projektive Punktreihen mehr als zwei Punkte und folglich alle ihre Punkte entsprechend gemein, und die in einer Ebene π gelegenen Punkte $T, \mathfrak{T}$ sind also auch identisch, wenn π die Raumkurve k^3 in einem reellen Punkte A und zwei konjugiert imaginären Punkten B, C schneidet. Nun war die Verbindungsgerade von T mit dem $\mathfrak{A}$ bezüglich k^3 konjugierten Punkte $\mathfrak{A}'$ die harmonische Polare des Nullpunktes P von π bezüglich des Dreiecks ABC, gleichgültig, ob die Eckpunkte B, C reell oder konjugiert imaginär sind, folglich gilt:

> Schneidet eine Ebene π eine Raumkurve III. Grades k^3 in drei Punkten A, B, C, von denen auch zwei konjugiert imaginär sein können, und ist P der π durch k^3 zugeordnete Nullpunkt, so fällt die harmonische Polare von P bezüglich des Dreiecks ABC zusammen mit der in π gelegenen Biplanare von k^3.

5. Gehen durch einen Punkt P_1 drei reelle Schmiegungsebenen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ einer Raumkurve III. Grades k^3, so gehen durch ihn auch drei bezw. in $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ enthaltene Schmiegungsstrahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$. Sie liegen in einer Ebene π_1. Den Punkten und Ebenen der Schmiegungsstrahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ sind bezüglich k^3 bezw. die Punkte und Ebenen dreier Schmiegungsstrahlen $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2$ konjugiert. $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2$ schneiden sich in dem P_1 konjugierten Punkte P_2 und liegen in der π_1 konjugierten Ebene π_2. Die Verbindungsgerade P_1P_2 ist somit eine Bisekante, die Schnittgerade $\pi_1\pi_2$ eine Biplanare von k^3. Sind

nun A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 die bezw. auf den Schmiegungsstrahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2$ gelegenen Punkte von k^3, und sind a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 bezw. die Tangenten der Kurve in diesen Punkten, so bilden die die Schmiegungsstrahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 — \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 — \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ bezw. schneidenden Bisekanten von k^3 drei durch die Bisekante $P_1 P_2$ gehende Regelscharen II. Ordnung $R^2_{\mathfrak{a}}, R^2_{\mathfrak{b}}, R^2_{\mathfrak{c}}$. Zu diesen Regelscharen gehören bezw. die Tangentenpaare $a_1, a_2 — b_1, b_2 — c_1, c_2$, sie trennen in ihnen die eigentlichen Bisekanten von den uneigentlichen. Die eigentlichen Bisekanten von $R^2_{\mathfrak{a}}, R^2_{\mathfrak{b}}, R^2_{\mathfrak{c}}$ bestimmen nun auf k^3 bezw. die Punktepaare dreier hyperbolischen Involutionen $[J]_{\mathfrak{a}}, [J]_{\mathfrak{b}}, [J]_{\mathfrak{c}}$ mit den Doppelpunkten $A_1, A_2 — B_1, B_2 — C_1, C_2$. Da aber $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2$ bezw. in den Ebenen π_1, π_2 liegen, so sind B_1, C_1 und B_2, C_2 Punktepaare von $[J]_{\mathfrak{a}}$, C_1, A_1 und C_2, A_2 Punktepaare von $[J]_{\mathfrak{b}}$, endlich A_1, B_1 und A_2, B_2 Punktepaare von $[J]_{\mathfrak{c}}$. Hiernach sind also $A_1, A_2 — B_1, B_2 — C_1, C_2$ bezw. durch $B_1, C_1 — C_1, A_1 — A_1, B_1$ harmonisch getrennt, was zur Folge hat, daß die Doppelelemente jeder einzelnen der drei Involutionen $[J]_{\mathfrak{a}}, [J]_{\mathfrak{b}}, [J]_{\mathfrak{c}}$ durch die Doppelelemente der beiden übrigen getrennt werden. Hyperbolische Punktinvolutionen auf k^3, deren Doppelelemente sich trennen, haben aber kein reelles Punktepaar gemein, folglich muß die gemeinsame Bisekante $P_1 P_2$ der drei Regelscharen $R^2_{\mathfrak{a}}, R^2_{\mathfrak{b}}, R^2_{\mathfrak{c}}$ eine uneigentliche sein und es gilt:

Durch den Schnittpunkt dreier reellen Schmiegungsebenen einer Raumkurve III. Grades k^3 geht eine uneigentliche Bisekante der Kurve. Eine eigentliche Biplanare einer Raumkurve III. Grades ist nur mit einer uneigentlichen Bisekante von k^3 inzident. Werden zu drei Punkten A_1, B_1, C_1 von k^3 drei weitere Punkte A_2, B_2, C_2 derart bestimmt, daß $A_1 B_1 A_2 C_1$, $B_1 C_1 B_2 A_1$, $C_1 A_1 C_2 B_1$ drei harmonische Würfe bilden, so sind die Ebenen $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ konjugiert bezüglich der Kurve.*)

*) *Cremona* hat diesen von *v. Staudt* zuerst veröffentlichten Satz, auf den schon in **1.** hingewiesen wurde, später ebenfalls ausgesprochen, und, wie ich soeben bemerke, mit seiner Hilfe in einer Anmerkung in den Nouvelles Annales de Mathématiques, 2. Serie, 1 (1862), S. 446 dargetan, daß eine eigentliche Biplanare von k^3 nur mit einer uneigentlichen Bisekante der Kurve inzident sein kann. Er benutzt zu seinem Beweise durch Rechnung gefundene Ergebnisse über äquianharmonische Punkte von k^3. Irrtümlicherweise ist die jene Anmerkung enthaltende dritte Fortsetzung des Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches in dem Inhaltsverzeichnisse des betreffenden Bandes der genannten Zeitschrift nicht aufgeführt und entgeht daher leicht dem Leser der *Cremona*schen Abhandlungen über kubische Raumkurven.

6. Gleitet eine Bisekante von k^3 längs einer Unisekante u dieser Kurve entlang, so beschreibt sie eine Regelschar II. Ordnung, deren Strahlen k^3 in den Punktepaaren einer Involution schneiden. Diese Involution ist hyperbolisch, wenn jene Regelschar zwei reelle Tangenten der Raumkurve enthält. In diesem Falle begrenzen die Tangenten auf u zwei Strecken, in denen u bezw. von den eigentlichen und uneigentlichen Bisekanten von k^3 getroffen wird. Fällt u insbesondere mit einem Schmiegungsstrahle $\mathfrak{a}$ von k^3 zusammen, und heißt α die ihn enthaltende Schmiegungsebene und α^2 der in α gelegene zur Tangentenschar von k^3 perspektive Kegelschnitt, so gehen durch jeden außerhalb α^2 gelegenen Punkt von $\mathfrak{a}$ drei eigentliche, durch jeden innerhalb α^2 gelegenen Punkt von $\mathfrak{a}$ nur je eine uneigentliche Biplanare von k^3. Da nun nach **5.** durch jeden Punkt des Schmiegungsstrahles $\mathfrak{a}$, in dem er eine eigentliche Biplanare von k^3 schneidet, eine uneigentliche Bisekante von k^3 geht, so kann $\mathfrak{a}$ nach der Auseinandersetzung am Anfange dieses Abschnittes innerhalb α^2 nur von eigentlichen Bisekanten geschnitten werden. Der Schnittpunkt einer Bisekante von k^3 mit einer beliebigen Schmiegungsebene der Kurve liegt also innerhalb oder außerhalb des Kegelschnittes, den diese Schmiegungsebene mit der Tangentenschar von k^3 gemein hat, je nachdem jene Bisekante eine eigentliche oder uneigentliche ist. Durch jeden Punkt einer uneigentlichen Bisekante gehen demnach drei reelle Schmiegungsebenen, durch jeden Punkt einer eigentlichen nur eine. Eine eigentliche Biplanare ist somit nicht nur, wie in **5.** bewiesen wurde, mit einer uneigentlichen Bisekante inzident, sondern auch umgekehrt eine uneigentliche Bisekante allein mit einer eigentlichen Biplanare.

7. Die Punktwürfe $A_1 B_1 A_2 C_1$ und $A_2 B_2 A_1 C_2$ auf der Raumkurve k^3 sind nach **5.** harmonisch, wenn k^3 von zwei bezüglich k^3 konjugierten Ebenen π_1, π_2 je in den Punkten A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 geschnitten wird. Sind somit $A_1, A_2 — B_1, B_2 — C_1, C_2$ homologe Punkte zweier auf k^3 gelegenen projektiven Punktreihen $[A_1, B_1, C_1, \ldots]$, $[A_2, B_2, C_2, \ldots]$, so entspricht dem Punkte A_2 der ersten Punktreihe der Punkt A_1 der zweiten. Die homologen Punkte A_1, A_2 beider projektiven Punktreihen entsprechen sich folglich doppelt, und demnach sind die nach **5.** sich gegenseitig trennenden Punktepaare $A_1, A_2 — B_1, B_2 — C_1, C_2$ Punktepaare einer elliptischen Punktinvolution.*) Die Verbindungs-

*) *v. Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage. Zweites Heft. Nürnberg 1857, S. 178, N. 285.

geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ gehören somit zu den Strahlen einer aus Bisekanten von k^3 bestehenden Regelschar II. Ordnung R^2, in der sich keine Tangenten von k^3 vorfinden. — Den Punkten des mit π_1 und A_1 inzidenten Schmiegungsstrahles $\mathfrak{a}_1$ sind nach **5.** die Punkte des mit π_2 und A_2 inzidenten Schmiegungsstrahles $\mathfrak{a}_2$ konjugiert. Sonach enthält die durch $\mathfrak{a}_1$ und den Regelstrahl $A_1 A_2$ von R^2 gehende Tangentialebene von R^2 auch die Tangente a_2 von k^3 im Punkte A_2 und berührt infolgedessen die Regelschar R^2 im Punkte A_2. Der Schmiegungsstrahl $\mathfrak{a}_1$ schneidet also R^2 außer in A_1 noch in einem Punkte A_1'', der auf dem durch A_2 gehenden Leitstrahle dieser Regelschar gelegen ist. Aus dem gleichen Grunde schneidet der Schmiegungsstrahl $\mathfrak{a}_2$ die Regelschar R^2 außer in A_2 noch in einem Punkte A_2'' ihres durch A_1 gehenden Leitstrahles. Nun ist $A_1'' A_2''$ ein Regelstrahl von R^2, folglich sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ reziproke Polaren für R^2; ein Gleiches gilt von den mit π_1, π_2 inzidenten durch B_1, B_2 bezw. C_1, C_2 gehenden Schmiegungsstrahlen $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ bezw. $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$. Die Schnittpunkte P_1, P_2 von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ bezw. $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2$ ergeben sich hiernach als Pole der Ebenen π_2, π_1, ihre Verbindungsgerade $P_1 P_2$ als Polare der Schnittgeraden $\pi_1 \pi_2$ bezüglich R^2.

8. In dem durch eine Raumkurve III. Grades k^3 bestimmten Nullraume Σ sind zwei bezüglich k^3 konjugierten Ebenen π_1, π_2 bezw. zwei bezüglich k^3 konjugierte Punkte P_1, P_2 als Nullpunkte zugewiesen. Schneiden die Ebenen π_1, π_2 die Raumkurve nur in reellen Punkten, so ist nach **5.** die Verbindungsgerade $P_1 P_2$ eine uneigentliche Bisekante von k^3; ihr entspricht in Σ die uneigentliche Biplanare $\pi_1 \pi_2$. Die Nullebenen π_1', π_2' zweier anderen bezüglich k^3 konjugierten Punkte P_1', P_2' der Bisekante $P_1 P_2$ sind nun ebenfalls bezüglich k^3 konjugiert, und da sie wiederum die uneigentliche Biplanare $\pi_1 \pi_2$ enthalten, so treffen sie die Raumkurve nach **6.** in je drei reellen Punkten A_1', B_1', C_1' bezw. A_2', B_2', C_2'. Die Bisekanten $A_1' A_2'$, $B_1' B_2'$, $C_1' C_2'$ bestimmen nach **7.** eine durch k^3 gehende Regelschar II. Ordnung R'^2, für welche die Bisekante $P_1 P_2$ und die Biplanare $\pi_1 \pi_2$ zu einander polar sind. Ebenso sind diese beiden Geraden auch polar zu einander bezüglich der aus Bisekanten von k^3 bestehenden Regelschar II. Ordnung R^2, welche nach **7.** die Ebenen π_1, π_2 bestimmen. Die je aus Bisekanten von k^3 gebildeten Regelscharen R^2, R'^2 haben nun eine Bisekante u gemein und folglich auch die durch ihre gemeinsamen reziproken Polaren $P_1 P_2$, $\pi_1 \pi_2$ von u harmonisch getrennte Gerade v. Durch eine Raumkurve III. Grades

und zwei ihrer Bisekanten geht aber nur eine Regelfläche II. Grades, somit sind R^2 und R'^2 identisch. Mit Rücksicht auf **7.** gilt hiernach:

Entsprechen sich eine uneigentliche Bisekante r und eine uneigentliche Biplanare $\mathfrak{r}$ einer Raumkurve III. Grades k^3 in dem durch k^3 bestimmten Nullraume, so sind sie auch reziproke Polaren für eine gewisse aus Bisekanten von k^3 gebildete Regelschar II. Ordnung R^2. Je zwei bezüglich R^2 konjugierte Ebenen π_1, π_2 der Biplanare $\mathfrak{r}$ sind auch konjugiert bezüglich k^3 und enthalten je drei reelle Schmiegungsstrahlen der Kurve. Den Punkten eines Schmiegungsstrahles der Ebene π_1 sind die Punkte eines Schmiegungsstrahles der Ebene π_2 bezüglich k^3 konjugiert. Derart einander zugeordnete Schmiegungsstrahlen schneiden k^3 in Punktepaaren, die je auf einem Regelstrahle von R^2 liegen, R^2 ist somit durch je zwei bezüglich k^3 konjugierte Ebenen der Biplanare $\mathfrak{r}$ bestimmt. Die mit der Bisekante r und folglich auch mit der Biplanare $\mathfrak{r}$ inzidenten Schmiegungsstrahlen bilden eine Regelschar (IV. Ordnung), deren Strahlen paarweise für R^2 polar sind.

Eine eigentliche Bisekante r von k^3 und die ihr durch den Nullraum Σ zugeordnete eigentliche Biplanare $\mathfrak{r}$ bestimmen ebenfalls eine aus Bisekanten von k^3 gebildete Regelschar II. Ordnung R^2, für welche beide Geraden reziproke Polaren sind. R^2 geht, wie ohne weiteres einleuchtet, durch die Tangenten von k^3 in den Schnittpunkten mit der Bisekante r und ruft auf r dieselbe Punkt- und in $\mathfrak{r}$ dieselbe Ebeneninvolution wie k^3 hervor.*)

Auf die eindeutige Beziehung zwischen der Bisekante r und der Regelschar R^2 hat auch Herr *Reye* im 24. Vortrage der dritten Auflage der II. Abteilung seiner Geometrie der Lage hingewiesen. Sie bietet sich ihm dar bei der Abbildung der Kongruenz der Bisekanten einer kubischen Raumkurve auf eine Ebene.

9. Schneiden zwei bezüglich k^3 konjugierte Ebenen π_1, π_2 die kubische Raumkurve k^3 bezw. in den reellen Punkten A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2, so sind bezüglich k^3 nach **8.** den Punkten der mit π_1 und bezw. A_1, B_1, C_1 inzidenten Schmiegungsstrahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ je die Punkte der mit π_2 und bezw. A_2, B_2, C_2 inzidenten Schmiegungsstrahlen $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2$ konjugiert. Folglich gehören die Bisekanten A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 zu einer durch k^3 gehenden Regel-

*) *Cremona,* Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches. Nouvelles Annales de Mathématiques 2. Serie, 1 (1862), S. 367.

schar II. Ordnung R^2. Diese Regelschar hat mit den Regelscharen II. Ordnung R^2_a, R^2_b, R^2_c, welche k^3 und bezw. die Tangentenpaare $a_1, a_2 — b_1, b_2 — c_1, c_2$ enthalten, bezw. die Regelstrahlen r'_a, r'_b, r'_c gemein. r'_a, r'_b, r'_c verbinden bezw. die Punkte $A_1^0, A_2^0 — B_1^0, B_2^0 — C_1^0, C_2^0$, in denen die durch $A_1, A_2 — B_1, B_2 — C_1, C_2$ bezw. gehenden Schmiegungsstrahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 — \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 — \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ die Regelschar R^2 noch einmal schneiden. Hat nun die durch A_1, B_1, C_1 bestimmte Ebene π_1 mit R^2 den Kegelschnitt π_1^2 gemein, so sind, da A_1, B_1, C_1, A_1^0, B_1^0, C_1^0 nach **7.** bezw. auf den durch A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 gehenden Leitstrahlen von R^2 liegen, $A_1 B_1 A_1^0 C_1$, $A_1 B_1 C_1 B_1^0$, $A_1 C_1^0, B_1 C_1$ nach **5.** je vier harmonische Punkte von π_1^2. Folglich sind:

$$A_1 A_2,\ B_1 B_2,\ r'_a,\ C_1 C_2.$$
$$A_1 A_2,\ B_1 B_2,\ C_1 C_2,\ r'_b.$$
$$A_1 A_2,\ r'_c,\ B_1 B_2,\ C_1 C_2$$

je vier harmonische Regelstrahlen von R^2. Zu den Strahlen von R^2 gehören nach **7.** keine Tangenten von k^3. Sie sind demnach eigentliche Bisekanten der Kurve, und diese ruft auf ihnen hyperbolische Involutionen hervor, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte jener Bisekanten mit k^3 sind. Da die bezüglich k^3 konjugierten Ebenen π_1, π_2 der Voraussetzung nach die Kurve in je drei reellen Punkten schneiden, so ist nach **5.** die Schnittgerade $\pi_1 \pi_2$ eine uneigentliche Biplanare und die durch k^3 in ihr hervorgerufene Ebeneninvolution elliptisch. Nach **8.** verbinden nun ein Paar Ebenen ϱ_1, ϱ_2 dieser Involution die auf einem beliebigen Regelstrahle r von R^2 gelegenen Kurvenpunkte mit der Biplanare $\pi_1 \pi_2$, folglich geht dasjenige Ebenenpaar dieser Ebeneninvolution, welches durch ϱ_1, ϱ_2 harmonisch getrennt wird, durch ein Paar bezüglich k^3 konjugierter Punkte von r. Werden umgekehrt zwei bezüglich k^3 konjugierte Punkte S_1^0, S_2^0 eines Regelstrahles s von R^2 aus der Biplanare $\pi_1 \pi_2$ durch bezüglich k^3 konjugierte Ebenen σ_1^0, σ_2^0 projiziert, so schneiden die beiden bezüglich k^3 konjugierten Ebenen, welche σ_1^0, σ_2^0 harmonisch trennen, s in seinen Schnittpunkten mit k^3. Die auf den Schmiegungsstrahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 — \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 — \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ bezw. gelegenen Punkte $A_1^0, A_2^0 — B_1^0, B_2^0 — C_1^0, C_2^0$, in denen die Bisekanten r'_a, r'_b, r'_c von den bezüglich k^3 konjugierten Ebenen π_1, π_2 bezw. geschnitten werden, sind nun konjugiert bezüglich k^3, somit treffen die beiden durch π_1, π_2 harmonisch getrennten und bezüglich k^3 konjugierten Ebenen die Bisekanten r'_a, r'_b, r'_c in ihren Schnittpunkten mit der Raumkurve.

10. Die Schnittgerade zweier zugeordneten Ebenen π_1, π_2 bezüglich einer Raumkurve III. Grades k^3 und die Verbindungsgerade ihrer Nullpunkte P_1, P_2 in dem durch k^3 bestimmten Nullraum sind nach **8.** reziproke Polaren für eine gewisse aus Bisekanten von k^3 gebildete Regelschar II. Ordnung R^2. Diese Regelschar besteht aus zugeordneten Strahlen bezüglich derjenigen hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz S_1^1, deren Leitgeraden mit P_1P_2 und $\pi_1\pi_2$ zusammenfallen. Durch S_1^1 ist k^3 eine auf R^2 gelegene Raumkurve III. Gerades k_0^3 zugeordnet. Sie hat ebenfalls $\pi_1\pi_2$ zur Biplanare und P_1P_2 zur Bisekante, sie ruft in ihnen bezw. dieselbe Ebenen- und Punktinvolution wie k^3 hervor, und sie geht durch diejenigen Punkte von R^2, in denen die mit der Bisekante P_1P_2 und der Biplanare $\pi_1\pi_2$ inzidenten Schmiegungsstrahlen von k^3 die Regelschar R^2 noch einmal schneiden. k^3 und k_0^3 berühren sich in den reellen oder konjugiert imaginären Schnittpunkten der Bisekante P_1P_2 mit R^2. Die Tangenten in diesen Punkten sind die Doppelstrahlen der durch die Kongruenz S_1^1 involutorisch gepaarten Regelschar R^2, und die in ihnen bezw. k^3 und k_0^3 sich anschmiegenden Ebenen fallen zusammen. Zwei mit P_1P_2 und $\pi_1\pi_2$ inzidente Schmiegungsstrahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ von k^3, deren Punkte wechselseitig bezüglich k^3 konjugiert sind, werden nach **8.** mit der gemeinsamen Biplanare $\pi_1\pi_2$ der beiden Raumkurven durch zwei bezüglich k^3 konjugierte Ebenen verbunden und schneiden nach **9.** die Raumkurve k_0^3 in zwei bezüglich k^3 konjugierten Punkten A_1^0, A_2^0. Die Punkte von k_0^3 sind folglich paarweise bezüglich k^3 konjugiert, oder k_0^3 wird durch k^3 in sich selbst übergeführt. Aus diesem Grunde nenne ich die kubische Raumkurve k_0^3 autokonjugiert bezüglich der kubischen Raumkurve k^3. Dieselbe Überlegung, die von k^3 zu k_0^3 führt, führt auch umgekehrt von k_0^3 zu k^3, somit ist auch umgekehrt k^3 autokonjugiert bezüglich k_0^3.

Die homologen Punkte der durch die Kongruenz S_1^1 einander zugeordneten Raumkurven k^3 und k_0^3 liegen auf je einem mit der Bisekante P_1P_2 und der Biplanare $\pi_1\pi_2$ inzidenten Schmiegungsstrahle beider Kurven, folglich kann die von diesen Schmiegungsstrahlen gebildete Regelschar R^4 sowohl durch die beiden projektiven kubischen Raumkurven wie auch durch die beiden sich ihnen anschmiegenden projektiven kubischen Ebenengewinde erzeugt werden. Die Bisekante P_1P_2 ist der Ort ihrer dreifachen Punkte, die Biplanare $\pi_1\pi_2$ der Ort ihrer dreifachen Berührungsebenen. Die Punkte zweier Regelstrahlen von R^4, die k^3 in den Punkten je eines Regelstrahles von R^2 schneiden, sind wechselweise konjugiert bezüglich der kubischen

Raumkurve k^3, ebenso ist jede Ebene des einen jener beiden Regelstrahlen konjugiert einer Ebene des andern bezüglich des k^3 sich anschmiegenden Ebenengewindes. Die Regelschar R^4 ist also als autokonjugiert bezüglich der Raumkurve III. Grades k^3 zu bezeichnen; sie ist, wie sich ohne weiteres ergibt, auch autokonjugiert bezüglich der Raumkurve III. Grades k_0^3.

11. Zu jeder Bisekante r einer Raumkurve III. Grades k^3 und der ihr durch den Nullraum Σ von k^3 zugeordneten Biplanare $\mathfrak{r}$ gehört nach **8.** eine aus Bisekanten von k^3 gebildete Regelschar II. Ordnung R^2, für welche r und $\mathfrak{r}$ zu einander polar sind. Umgekehrt sind für jede aus Bisekanten von k^3 gebildete Regelschar II. Ordnung R^2 je eine Bisekante r und eine Biplanare $\mathfrak{r}$ zu einander polar. Auf jeder solchen Regelschar liegt nach **10.** eine bezüglich k^3 autokonjugierte kubische Raumkurve k_0^3; sie ist k^3 durch eine hyperbolische lineare Kongruenz zugeordnet, deren Leitgeraden mit den durch R^2 bestimmten Geraden r und $\mathfrak{r}$ zusammenfallen. Die ∞^2 kubischen Raumkurven k_0^3 und ihre sich ihnen anschmiegenden Ebenengewinde $\varkappa_0^3$ sind je durch diese linearen Kongruenzen projektiv auf k^3 und das sich ihr anschmiegende Ebenengewinde $\varkappa^3$ bezogen. Sie sind perspektiv zu je einer der ∞^2 Regelscharen IV. Ordnung, aus denen sich die von den Schmiegungsstrahlen von k^3 gebildete Kongruenz III. Ordnung III. Klasse C_3^3 zusammensetzt.

Berlin, 1. März 1905.

Über ein merkwürdiges Polyeder von einseitiger Gesamtfläche.

Von Herrn *Ernst Steinitz* in Berlin.

Zweck der folgenden Zeilen ist, einige aus der Analysis situs einseitiger Flächen bekannte Tatsachen für den Fall der Polyeder und insbesondere an einem bestimmten Polyeder weiter zu verfolgen.

1. Ableitung und Beschreibung des einseitigen Heptaeders.

Wir gehen von der Betrachtung eines regulären Oktaeders aus. Sein Mittelpunkt sei O, seine Ecken, die sich zu drei Paaren von Gegenecken gruppieren X_-, X_+; Y_-, Y_+; Z_-, Z_+. Zwecks bestimmterer Vorstellung sei das Oktaeder in der in Fig. 1 gezeichneten Lage gedacht, so daß also die Diagonale $X_- X_+$ von links nach rechts, die Diagonale $Y_- Y_+$ von vorn nach hinten, die Diagonale $Z_- Z_+$ von unten nach oben gerichtet ist. Wir teilen nun die 8 Oktaederflächen in zwei Gruppen, die der positiven und der negativen, indem wir jeder Fläche dasjenige Vorzeichen beilegen, welches dem Produkt der in der Bezeichnung der Ecken verwandten Vorzeichen entspricht. Wir haben dann die positiven Flächen

$$\alpha = X_+ Y_- Z_-, \quad \beta = X_- Y_+ Z_-, \quad \gamma = X_- Y_- Z_+, \quad \delta = X_+ Y_+ Z_+$$

und die negativen

$$\alpha' = X_- Y_+ Z_+, \quad \beta' = X_+ Y_- Z_+, \quad \gamma' = X_+ Y_+ Z_-, \quad \delta' = X_- Y_- Z_-.$$

Neben diesen beiden Gruppen von Flächen betrachten wir noch eine dritte, die der Quadrate

$$\xi = Y_- Z_- Y_+ Z_+, \quad \eta = Z_- X_- Z_+ X_+, \quad \zeta = X_- Y_- X_+ Y_+.$$

Durch jede Oktaederkante geht je eine Fläche aus jeder dieser drei Gruppen. Lassen wir also irgend eine der drei Gruppen fort, so bilden die übrigen Flächen, indem durch jede Kante zwei von ihnen gehen, ein geschlossenes Polyeder. Wir erhalten so außer dem Oktaeder noch, durch Zusammenfassen der Quadrate und der positiven bezw. negativen Oktaederflächen, zwei unter einander gleichartige Heptaeder. Alle drei Polyeder haben dieselben Ecken und Kanten. — Das Oktaeder kann auf 24-fache Weise (durch Drehung um den Mittelpunkt O) mit sich selbst zur Deckung gebracht werden, außerdem gibt es noch 24 symmetrische Operationen (d. h. Spiegelungen und Drehspiegelungen), die dasselbe leisten. Von diesen Operationen führt die Hälfte — nämlich 12 Drehungen und 12 symmetrische Operationen — jedes der Heptaeder in sich über, die andere Hälfte vertauscht sie mit einander.

Im folgenden beziehen wir uns auf das aus den Flächen

$$(1.)\quad \begin{cases} \alpha = X_+Y_-Z_-, \quad \beta = X_-Y_+Z_-, \quad \gamma = X_-Y_-Z_+, \quad \delta = X_+Y_+Z_+, \\ \xi = Y_-Z_-Y_+Z_+, \quad \eta = Z_-X_-Z_+X_+, \quad \zeta = X_-Y_-X_+Y_+ \end{cases}$$

gebildete Heptaeder und bezeichnen es kurz als *„einseitiges Heptaeder“*. Es ist in der Tat einseitig: Bewegen wir uns etwa auf der vom Mittelpunkt O abgewandten Seite der Fläche $X_+Y_+Z_+$ (Fig. 1), so gelangen wir, die Kante X_+Y_+ überschreitend, nach der unteren Seite von $X_+Y_+X_-Y_-$, von da über die Kante X_-Y_- nach der von O abgewandten Seite von $X_-Y_-Z_+$, von hier über die Kante Y_-Z_+ nach der rechten Seite von $Y_-Z_-Y_+Z_+$ und endlich über Y_+Z_+ nach der dem Mittelpunkte zugekehrten Seite der Ausgangsfläche $X_+Y_+Z_+$. Ohne die Anschauung zu Hilfe zu nehmen, können wir die Einseitigkeit des Polyeders nach *Möbius* so nachweisen. Wir betrachten die Reihe der durchwanderten Polygone, deren jedes mit dem folgenden benachbart ist, während das letzte mit dem ersten zusammenfällt, legen dem ersten einen beliebigen Umlaufssinn, etwa $X_+Y_+Z_+$, bei und bestimmen den Umlaufssinn jedes folgenden so, daß die mit dem vorhergehenden gemeinsame Kante im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird. Wir erhalten dann:

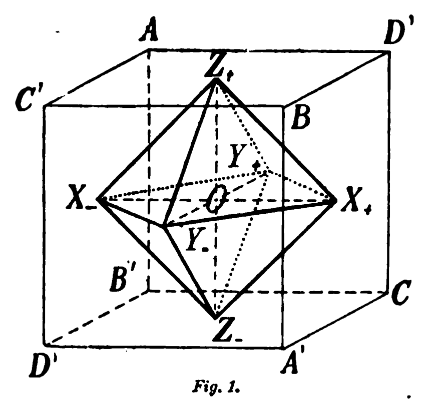


Fig. 1.

$$X_+Y_+Z_+, \quad Y_+X_+Y_-X_-, \quad X_-Y_-Z_+, \quad Z_+Y_-Z_-Y_+, \quad Z_+Y_+X_+$$

und erkennen, daß die als Anfangs- und Endpolygon auftretende Fläche in beiden Fällen verschiedenen Umlaufssinn erhält, was anzeigt, daß der durchlaufene Weg kontinuierlich von der einen Seite der Ausgangsfläche auf die andere führt. — Es hat jedoch schon *W. Dyck* darauf hingewiesen, daß die zuletzt herbeigezogene Eigenschaft, wonach bei gewissen geschlossenen Wegen die Indikatrix (der Umlaufssinn) sich umkehrt, etwas der Fläche an sich Eigentümliches darstellt, die Einseitigkeit dagegen eine Beziehung der Fläche zu ihrer Umgebung ist und verloren gehen kann, wenn die Fläche in einer andern Umgebung, d. i. in einem Raum von anderen Zusammenhangsverhältnissen, betrachtet wird. Im Euklidischen und ebenso im projektiven Raum von drei Dimensionen sind allerdings die einseitigen Flächen zugleich diejenigen mit umkehrbarer Indikatrix und umgekehrt; in manchen andersartigen Räumen trifft dies jedoch nicht zu. Ein allgemeiner Satz über die Beziehungen zwischen Ein- und Zweiseitigkeit einerseits, Umkehrbarkeit und Nichtumkehrbarkeit der Indikatrix andererseits bei Gebilden von beliebig vielen Dimensionen soll in einem zweiten Artikel angegeben werden.

Führt man auf dem einseitigen Heptaeder einen Schnitt längs des Kantenzuges $X_+ Y_- Z_+ X_- Y_+ Z_- X_+$ aus, so wird die Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandelt und läßt sich in eine Ebene ausbreiten, wie Fig. 2 zeigt. Daß eine solche Umwandlung durch einen einzigen geschlossenen Schnitt herbeigeführt wird, zeigt, wie die Analysis situs lehrt, daß das Heptaeder, als einseitige Fläche von geringstem Zusammenhange, mit der projektiven Ebene gleichwertig, d. h. auf dieselbe ein-eindeutig und (im Sinne der projektiven Geometrie) stetig

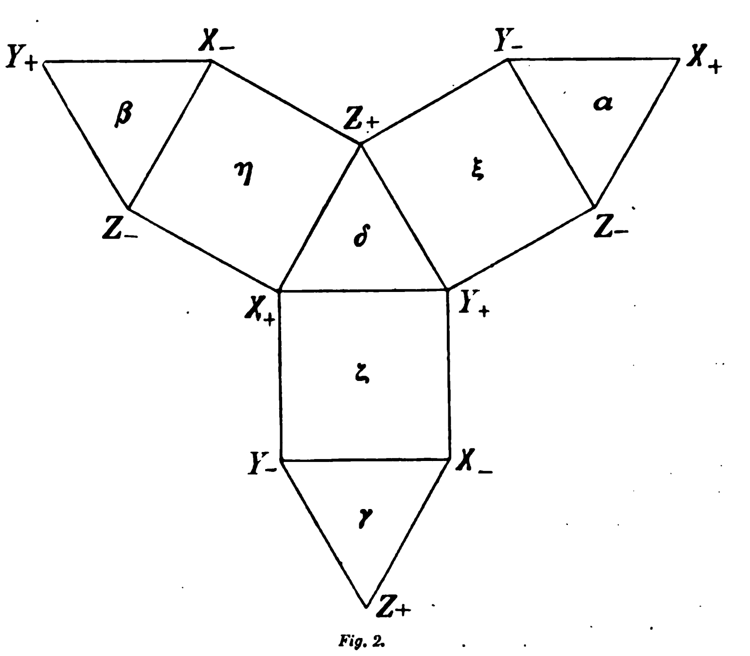


Fig. 2.

abbildbar ist. Diese Abbildung soll uns im folgenden beschäftigen. — In jeder der Diagonalen X_-X_+, Y_-Y_+, Z_-Z_+ durchsetzen sich zwei Quadrate; die Punkte der Diagonalen sind also Doppelpunkte der Gesamtfläche, bis auf die Eckpunkte, welche einfach sind, und den Schnittpunkt O, welcher dreifach zählt. Bei der in Rede stehenden Abbildung werden den Doppelpunkten je zwei, dem Punkt O drei verschiedene Punkte der Ebene entsprechen.

2. *Einteilung der Ebene durch ein vollständiges Vierseit.*

Die Ebene der projektiven Geometrie wird durch vier Geraden a, b, c, d, deren keine drei durch einen Punkt gehen, in sieben, im Sinne dieser Geometrie konvexe Gebiete, vier Dreiecke und drei Vierecke, eingeteilt, wenn der Zusammenhang im Unendlichen berücksichtigt wird. Die Ecken des vollständigen Vierseits seien

$$\text{(2.)}\qquad \begin{cases} (a, d) = X_-, & (b, c) = X_+, \\ (b, d) = Y_-, & (c, a) = Y_+, \\ (c, d) = Z_-, & (a, b) = Z_+. \end{cases}$$

Auf jeder der Geraden a, b, c, d haben wir drei Ecken und verstehen unter der durch zwei von ihnen bestimmten Strecke (Kante) natürlich immer diejenige (endliche oder unendlich lange), welche die dritte Ecke nicht enthält. Dies festgehalten sind die sieben Polygone durch die zyklische Folge ihrer Ecken bestimmt. Wir erhalten die Dreiecke

$$\alpha = X_+Y_-Z_-, \quad \beta = X_-Y_+Z_-, \quad \gamma = X_-Y_-Z_+, \quad \delta = X_+Y_+Z_+$$

und die Vierecke

$$\xi = Y_+Z_+Y_-Z_-, \quad \eta = Z_+X_+Z_-X_-, \quad \zeta = X_+Y_+X_-Y_-$$

(Fig. 3). Diese Bezeichnung stimmt genau mit dem für das Heptaeder aufgestellten Schema (1.) überein. Die Elemente d. h. Ecken, Kanten und Flächen des Heptaeders sind also in derselben Weise gruppiert wie bei der Vierseitseinteilung der Ebene; beide Gebilde sind nach *Eberhards* Terminologie „*isomorph*".

Hiernach erkennt man leicht die Möglichkeit, das Heptaeder und die projektive Ebene Punkt für Punkt ein-eindeutig und (im Sinne der projek-

tiven Geometrie) stetig auf einander abzubilden, und zwar derartig, daß jeder Heptaederfläche das gleichbezeichnete Polygon der ebenen Einteilung entspricht. Man kann, um eine derartige Abbildung herzustellen, zunächst die gleichbenannten Kanten stetig auf einander beziehen und dann noch auf unendlich viele Arten für je zwei gleichbenannte Flächen eine eindeutige stetige Abbildung herstellen, bei welcher die bereits festgesetzte Beziehung auf den Kanten berücksichtigt wird.

3. *Das allgemeine einseitige Heptaeder.*

Durch irgend eine Kollineation wird jedes Polyeder in ein isomorphes verwandelt. Wollen wir jede Kollineation in Betracht ziehen, so müssen wir natürlich auch solche Polyeder zulassen, die sich ins Unendliche erstrecken. Nur für wenige Polyeder mit geringer Flächenzahl gilt die Umkehrung des eben ausgesprochenen Satzes, daß also isomorphe Polyeder auch kollinear sein müssen. Beim einseitigen Heptaeder trifft sie zu, sofern wir nur die Bedingungen stellen, *daß das Polyeder* wirklich *eine räumliche Figur und daß seine Flächen konvex**) *sein sollen.* Sucht man nämlich in allgemeinster Weise ein Polyeder mit sieben Flächen

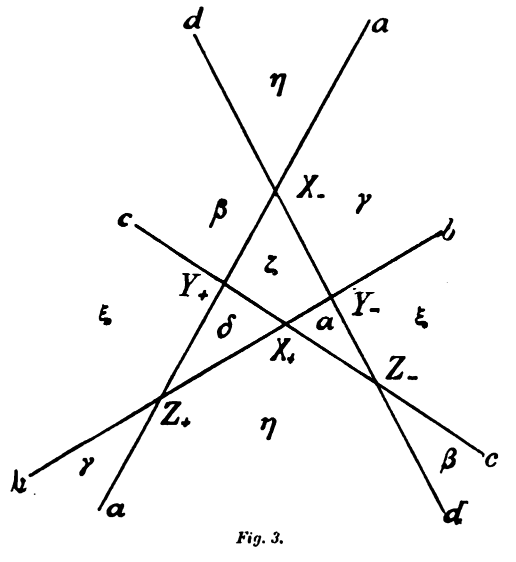


Fig. 3.

$$X_+ Y_+ Z_+,\quad X_+ Y_- Z_-,\quad X_- Y_+ Z_-,\quad X_- Y_- Z_+,$$
$$Y_+ Z_+ Y_- Z_-,\quad Z_+ X_+ Z_- X_-,\quad X_+ Y_+ X_- Y_-$$

herzustellen, so erkennt man, weil von den drei Geraden $X_- X_+$, $Y_- Y_+$, $Z_- Z_+$ je zwei in einer Vierecksebene liegen sollen, also sich schneiden müssen, daß diese Geraden alle drei entweder durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen müssen. Das letztere ist durch die Forderung der *Räumlichkeit* ausgeschlossen. Die drei Geraden haben demnach einen

*) Diese Voraussetzung halten wir stets fest.

Schnittpunkt O. Dieser darf mit keiner der 6 Ecken zusammenfallen, wenn anders wirkliche Vierecke entstehen sollen. Bei der Konstruktion des Heptaeders hat man also zunächst durch einen Punkt O drei Gerade zu ziehen, die nicht in einer Ebene liegen, und auf jeder von ihnen zwei von einander und von O verschiedene, im übrigen willkürliche Punkte X_-, X_+, Y_-, Y_+, Z_-, Z_+ anzunehmen. Ist dies geschehen, so ist die weitere Konstruktion stets und nur auf eine Weise durchführbar. Zwar ist es bei der Konstruktion jeder Kante z. B. $X_- Y_+$ zunächst zweifelhaft, welche der beiden sich zu der ganzen Geraden ergänzenden Verbindungsstrecken der Eckpunkte man zu nehmen hat; doch wird diese Mehrdeutigkeit durch die Forderung der *Konvexität* behoben. Soll nämlich $X_- Y_- X_+ Y_+$ ein konvexes Viereck sein, so muß der Schnittpunkt der unbegrenzten Geraden $Y_+ X_-$ und $Y_- X_+$ außerhalb der begrenzten Seiten $Y_+ X_-$ und $Y_- X_+$ liegen. Hiernach hat man die 6 Gegenkantenpaare des Heptaeders

$$\begin{matrix} Y_+Z_+, & Y_+Z_-, & Z_+X_+, & Z_+X_-, & X_+Y_+, & X_+Y_- \\ Y_-Z_-, & Y_-Z_+, & Z_-X_-, & Z_-X_+, & X_-Y_-, & X_-Y_+ \end{matrix}$$

so zu konstruieren, daß erst die Verlängerungen der Kanten eines jeden Paares sich schneiden. Dann begrenzen aber diese Kanten nicht nur drei konvexe Vierecke

$$Y_-Z_-Y_+Z_+, \quad Z_-X_-Z_+X_+, \quad X_-Y_-X_+Y_+,$$

sondern auch vier Dreiecke

$$X_+Y_-Z_-, \quad X_-Y_+Z_-, \quad X_-Y_-Z_+, \quad X_+Y_+Z_+.$$

Um nämlich zu zeigen, daß z. B. die Kanten Y_+Z_+, Z_+X_+, X_+Y_+ ein Dreieck begrenzen und nicht etwa einen unpaaren Streckenzug bilden, hat man nur die Existenz einer Geraden bezw. Ebene nachzuweisen, welche nicht diese Strecken selbst, sondern ihre Ergänzungsstrecken schneidet. Dies ist aber, zufolge unserer Konstruktion, bei der Ebene $X_- Y_- Z_-$, welche die Gegenkanten Y_-Z_-, Z_-X_-, X_-Y_- enthält, der Fall.

Hat man nun *zwei* solche Heptaeder, deren Ecken wir durch dieselben Buchstaben $X_-, X_+, Y_-, Y_+, Z_-, Z_+$ bezeichnen, so ist zu zeigen, daß es eine und nur eine Kollineation gibt, welche das erste Heptaeder in das zweite, und zwar jede Ecke in die gleichbenannte, überführt.

Eine Kollineation, wie wir sie suchen, muß die Ebenen $X_+ Y_+ Z_+$, $X_- Y_- Z_-$, $X_+ Y_+ X_- Y_-$, $Y_+ Z_+ Y_- Z_-$, $Z_+ X_+ Z_- X_-$ der ersten Figur in die gleichbenannten der zweiten überführen, und da keine vier dieser Ebenen durch einen Punkt gehen, so ist durch diese Bedingung eine Kollineation eindeutig bestimmt. Dieselbe führt, wie man sofort sieht, die Ecken des ersten Heptaeders in die gleichbenannten des zweiten, ferner aber, weil konvexe Polygone nur in konvexe übergehen können und weil, wie wir sahen, zufolge der geforderten Konvexität das Heptaeder durch seine Ecken bestimmt ist, auch die Flächen und Kanten des ersten Heptaeders in die gleichbenannten des zweiten über.

4. Flächenweise kollineare Abbildung des einseitigen Heptaeders auf die durch ein vollständiges Vierseit bewirkte Gebietseinteilung der Ebene.

Wenn zwei isomorphe Polyeder in solcher Weise ein-eindeutig und stetig auf einander abgebildet sind, daß jeder geraden Strecke auf einer Fläche des einen wieder eine gerade Strecke auf dem andern entspricht oder, mit anderen Worten, daß je zwei entsprechende Flächen kollinear sind, so soll diese Abbildung eine „*flächenweise kollineare*“ heißen. Es sei jedoch ausdrücklich betont, daß Eindeutigkeit und Stetigkeit der Abbildung auch für die Kanten gefordert wird. Hat man z. B. einen Würfel und ein beliebiges ihm isomorphes, von konvexen Vierecken gebildetes Hexaeder, so gibt es zu jedem Paare entsprechender Flächen eine bestimmte Kollineation, welche die eine in die andere überführt. Aber die Würfelkanten erfahren hierbei, da sie zu je zwei Flächen gehören, zwei Abbildungen, und diese sind im allgemeinen nicht identisch. Die in diesem Beispiel betrachtete Abbildung der beiden Polyeder ist also nicht flächenweise kollinear in unserem Sinne. — Eine räumliche Kollineation, welche ein Polyeder in ein zweites überführt, liefert zugleich eine flächenweise kollineare Abbildung der beiden Polyeder auf einander; aber es leuchtet ein, daß nicht umgekehrt jede solche Abbildung in einer räumlichen Kollineation enthalten zu sein braucht. Im Falle des einseitigen Heptaeders ist indessen die durch die räumliche Kollineation gelieferte Abbildung die einzige flächenweise kollineare. Denn zunächst sind die Kollineationen der Vierecke durch die Zuweisung der

Ecken völlig bestimmt, sodann aber bestimmen die hiermit zugleich festgelegten projektiven Beziehungen der sämtlichen Kanten ihrerseits wieder die Kollineationen in den Dreiecken.

Wendet man den Ausdruck „flächenweise kollineare Abbildung" analog wie bei Polyedern auch bei Gebietseinteilungen der Ebene an, so erkennt man, daß eine Kollineation der gesamten Ebene zugleich eine flächenweise kollineare Abbildung jeder in ihr enthaltenen Gebietseinteilung liefert, während nicht umgekehrt jede solche Abbildung einer jeden beliebigen Gebietseinteilung notwendig einer Kollineation der ganzen Ebene entspringt. Handelt es sich aber speziell um Gebietseinteilungen zweier Ebenen ε und ε', welche durch vollständige Vierseite $abcd$ bezw. $a'b'c'd'$ bewirkt werden, so zeigt man — genau wie bei den Heptaedern —, daß die durch Zuweisung der Geraden a, b, c, d und a', b', c', d' bestimmte Kollineation der gesamten Ebenen die einzige flächenweise kollineare Abbildung der Gebietseinteilungen liefert.

Nach dem Vorangehenden liegt die Frage nahe, *ob unter den unendlich vielen möglichen eindeutigen und stetigen Abbildungen eines einseitigen Heptaeders auf eine isomorph zugeordnete durch ein Vierseit $abcd$ bewirkte Gebietseinteilung einer Ebene ε sich auch eine flächenweise kollineare befindet.* Daß es nicht mehr als eine geben kann, ist klar, es handelt sich also nur darum, zu beweisen, daß überhaupt eine existiert.

Wir bezeichnen wie bisher die Ecken des Heptaeders und die ihnen zugeordneten des Vierseits in der Ebene ε durch die nämlichen Buchstaben $X_-X_+Y_-Y_+Z_-Z_+$, verstehen aber unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; ξ, η, ζ; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ nicht mehr die begrenzten Heptaeder- bezw. negativen Oktaederflächen, sondern die unbegrenzten Ebenen, in welchen jene Flächen liegen. Die Gegenkanten bringen wir durch Verlängerung zum Schnitt und bezeichnen die Schnittpunkte wie folgt

$$(3.)\quad \begin{cases} (Y_+Z_+,\, Y_-Z_-) = X_-^\infty, & (Y_+Z_-,\, Y_-Z_+) = X_+^\infty, \\ (Z_+X_+,\, Z_-X_-) = Y_-^\infty, & (Z_+X_-,\, Z_-X_+) = Y_+^\infty, \\ (X_+Y_+,\, X_-Y_-) = Z_-^\infty, & (X_+Y_-,\, X_-Y_+) = Z_+^\infty, \end{cases}$$

so daß wir also auf jeder Kante drei Punkte haben, zu deren Bezeichnung die Buchstaben X, Y, Z und Vorzeichen mit negativem Produkt verwandt werden. Die sechs Schnittpunkte liegen zu je dreien auf vier Geraden

$$X_-^\infty Y_+^\infty Z_+^\infty, \quad X_+^\infty Y_-^\infty Z_+^\infty, \quad X_+^\infty Y_+^\infty Z_-^\infty, \quad X_-^\infty Y_-^\infty Z_-^\infty,$$

bilden also die Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen Ebene wir mit ε^∞ bezeichnen; im Falle des im § 1 beschriebenen Heptaeders ist sie die unendlich ferne Ebene. Wie in ε^∞, so haben wir auch in jeder der Heptaederebenen ein vollständiges Vierseit. In der folgenden Tabelle sind dieselben zusammengestellt:

$$(4.)\quad \begin{cases} (\alpha)\ X_-^\infty Y_+^\infty Z_+^\infty, & X_+ Y_- Z_+^\infty, \quad X_+ Y_+^\infty Z_-, \quad X_-^\infty Y_- Z_- \\ (\beta)\ X_- Y_+ Z_+^\infty, & X_+^\infty Y_-^\infty Z_+^\infty, \quad X_+^\infty Y_+ Z_-, \quad X_- Y_-^\infty Z_- \\ (\gamma)\ X_- Y_+^\infty Z_+, & X_+^\infty Y_- Z_+, \quad X_+^\infty Y_+^\infty Z_-^\infty, \quad X_- Y_- Z_-^\infty \\ (\delta)\ X_-^\infty Y_+ Z_+, & X_+ Y_-^\infty Z_+, \quad X_+ Y_+ Z_-^\infty, \quad X_-^\infty Y_-^\infty Z_-^\infty \\ (\xi)\ X_-^\infty Y_+ Z_+, & X_+^\infty Y_- Z_+, \quad X_+^\infty Y_+ Z_-, \quad X_-^\infty Y_- Z_- \\ (\eta)\ X_- Y_+^\infty Z_+, & X_+ Y_-^\infty Z_+, \quad X_+ Y_+^\infty Z_-, \quad X_- Y_-^\infty Z_- \\ (\zeta)\ X_- Y_+ Z_+^\infty, & X_+ Y_- Z_+^\infty, \quad X_+ Y_+ Z_-^\infty, \quad X_- Y_- Z_-^\infty. \end{cases}$$

Jede der Ebenen wird durch das vollständige Vierseit in sieben Gebiete eingeteilt, von denen eines die begrenzte Heptaederfläche darstellt. Wir bilden nun die sieben Heptaederebenen kollinear auf die Ebene ε ab, indem wir den Geraden der in jenen Ebenen enthaltenen Vierseite die Geraden

$$a = X_- Y_+ Z_+, \quad b = X_+ Y_- Z_+, \quad c = X_+ Y_+ Z_-, \quad d = X_- Y_- Z_-$$

der Ebene ε entsprechen lassen. Hierbei werden aber die sieben begrenzten Heptaederflächen auf die sieben gleichbezeichneten Gebiete von ε kollinear abgebildet, und wir haben, um nachzuweisen, daß diese Abbildung auch in dem oben angegebenen Sinne flächenweise kollinear ist, nur zu zeigen, daß auf den Kanten die Eindeutigkeit nicht verletzt ist. Dies aber ist klar, wenn wir die beiden projektiven Abbildungen einer Kante nicht nur innerhalb ihres Verlaufes, sondern auch auf ihrer Verlängerung verfolgen; denn alsdann haben wir auf der Geraden drei Punkte — die Ecken des vollständigen Vierseits —, von denen wir bereits wissen, daß ihnen in beiden Abbildungen dieselben Punkte entsprechen.

Die unter (4.) angegebenen vollständigen Vierseite sind die Schnitte der Heptaederebenen mit den negativen Oktaederebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Hat das Heptaeder die halbreguläre Form, von der wir ausgingen, so bilden diese Ebenen ein reguläres Tetraeder, dessen Ecken A', B', C', D' (Fig. 1) im Verein mit denen des von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gebildeten regulären Tetraeders

$ABCD$ die Ecken des dem Oktaeder umbeschriebenen Würfels darstellen. Die Heptaederebenen sind auf die Ebene ε und dadurch auch auf einander kollinear bezogen. Dabei hat, wie leicht ersichtlich, jede Dreiecksebene mit jeder Vierecksebene perspektive Lage; die Schnittkante zweier solcher Ebenen liegt nämlich in einer der Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ und die Kollineation erweist sich als identisch mit derjenigen Perspektivität, welche den Schnittpunkt der drei übrigen zum Zentrum hat. Hiernach kann man in einfachster Weise zu einem Punkte irgend einer Heptaederebene die entsprechenden in den übrigen finden und zu zwei beliebigen auf der Gesamtfläche des Heptaeders angenommenen Punkten denjenigen sie verbindenden Streckenzug konstruieren, welcher sich bei der Abbildung auf die Ebene in eine Gerade verwandelt.

Läßt man ε mit ε^∞ und die in ε liegenden Punkte $X_- X_+ Y_- Y_+ Z_- Z_+$ mit $X_-^\infty X_+^\infty Y_-^\infty Y_+^\infty Z_-^\infty Z_+^\infty$ zusammenfallen, so haben wir acht kollineare Ebenen, die sich in zwei Gruppen anordnen

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \quad \text{und} \quad \xi, \eta, \zeta, \varepsilon^\infty.$$

Jede Ebene der einen Gruppe ist zu jeder der andern perspektiv und die Perspektivitätszentren sind die Ecken des Tetraeders $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Wir kommen damit auf das vielfach untersuchte System dreier Tetraeder in desmischer Lage; die Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta$, $\xi\eta\zeta\varepsilon^\infty$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ bilden ein solches. In jedem desmischen Tetraedersystem sind 24 einseitige Heptaeder enthalten, man hat die Ebenen eines von ihnen, wenn man von den zwölf Ebenen des desmischen Systems diejenigen eines Tetraeders und noch irgend eine andere fortläßt. Ebenso liefert das konjugierte desmische System 24 einseitige Heptaeder. Es treten also diese Heptaeder in Gruppen von je 48 auf dergestalt, daß durch irgend eines von ihnen die ganze Gruppe bestimmt ist.

Wir wollen auf diese Beziehungen nicht weiter eingehen, dagegen den oben geführten Nachweis für die Möglichkeit der flächenweise kollinearen Abbildung von Heptaeder und Ebene noch in einem Punkte ergänzen. Wenn es sich zunächst nur darum handelt, *eine zum einseitigen Heptaeder isomorphe polygonale Einteilung der Ebene* zu geben, so ist klar, daß die durch ein vollständiges Vierseit hervorgebrachte nicht die einzig mögliche ist. Wir brauchen z. B. nur die Ecken eines vollständigen Vierseits kontinuierlich zu verschieben und mit ihnen die zwölf Kanten, sodaß je drei Kanten, welche vorher zusammen eine Gerade ausmachten, nunmehr einen

unpaaren geschlossenen Streckenzug bilden, so wird die neue Figur (Fig. 4), solange die Verschiebungen unterhalb gewisser Grenzen liegen, nach wie vor eine zum Heptaeder isomorphe polygonale Einteilung der Ebene liefern. Es ist nun aber bemerkenswert, *daß eine flächenweise kollineare Abbildung des Heptaeders auf die Ebene nur so möglich ist, daß die sieben den Heptaederflächen entsprechenden Gebiete der Ebene durch die Geraden eines vollständigen Vierseits gegen einander abgegrenzt sind.*

Um den Nachweis zu führen, formulieren wir unsere Abbildungsaufgabe so:

Die Flächen eines einseitigen Heptaeders sollen auf eine Ebene abgebildet werden und zwar so, daß

1. die Abbildung jeder einzelnen Fläche kollinear ist,
2. die Punkte einer jeden Kante in den beiden zu den Flächen der Kante gehörigen Kollineationen dieselben Bilder haben,
3. die Abbildung des ganzen Heptaeders die Ebene einfach und lückenlos überdeckt.

Wir wollen zunächst einmal von der dritten Forderung ganz absehen und annehmen, es läge eine Abbildung des Heptaeders auf eine Ebene ε vor, welche die Bedingungen 1. und 2. erfüllt. Wir bezeichnen die Heptaederecken und -flächen wie früher. Jede Ecke nimmt an vier Kollineationen teil; aus 2. ergibt sich aber, daß alle vier Bilder zusammenfallen müssen. Wir bezeichnen auch hier wieder die Bilder wie die Ecken, denen sie entsprechen, bringen ferner auch in der Ebene ε die gegenüberliegenden Seiten der Vierecke $Y_+ Z_+ Y_- Z_-$, $Z_+ X_+ Z_- X_-$, $X_+ Y_+ X_- Y_-$ durch Verlängerung zum Schnitt und führen für die Schnittpunkte die unter (3.) angegebene Bezeichnung ein. Wir denken uns ferner die kollinearen Abbildungen über

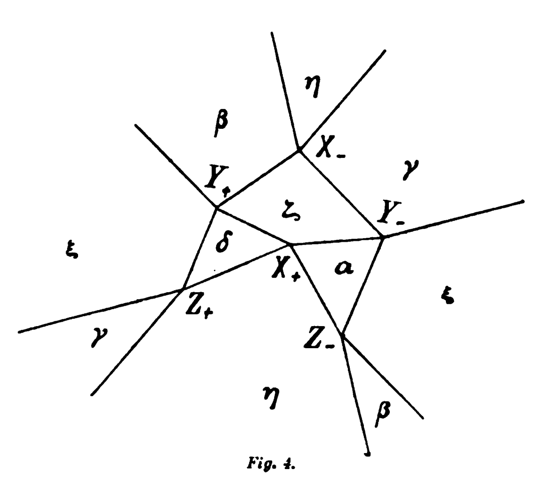


Fig. 4.

die begrenzten Heptaederflächen hinaus fortgesetzt und auf die ganzen Ebenen ausgedehnt. Dann ist die Bedingung 2. auch auf den Verlängerungen der Kanten erfüllt. Fassen wir nun die Kollineationen der Viereckseebenen ins Auge, so ergibt sich, daß den in ihnen liegenden Punkten $X_-^\infty X_+^\infty Y_-^\infty Y_+^\infty Z_-^\infty Z_+^\infty$

die gleichbezeichneten Punkte von ε entsprechen. Aus 2. folgt aber, daß die Punkte $X_-^x X_+^x Y_-^x Y_+^x Z_-^x Z_+^x$, wenn wir sie den Dreiecksebenen zurechnen, in den Kollineationen dieser dieselbe Abbildung erfahren. Nun liegen aber diese Punkte in den Dreiecksebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu je dreien in einer Geraden $X_-^x Y_+^x Z_+^x$, $X_+^x Y_-^x Z_+^x$, $X_+^x Y_+^x Z_-^x$, $X_-^x Y_-^x Z_-^x$; dieselbe Lage müssen daher auch die so bezeichneten Punkte der Ebene ε haben.

Wir haben demnach jetzt in der Ebene ε weiter zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die aus den Punkten $X_- X_+ Y_- Y_+ Z_- Z_+$ abgeleiteten Punkte $X_-^x X_+^x Y_-^x Y_+^x Z_-^x Z_+^x$ die angegebene Lage haben. Dies ist zunächst dann der Fall, wenn $X_- X_+ Y_- Y_+ Z_- Z_+$ die Ecken eines vollständigen Vierseits sind, dann nämlich sind diese Punkte mit den Punkten $X_-^x X_+^x Y_-^x Y_+^x Z_-^x Z_+^x$ identisch. Schließen wir diesen bereits behandelten Fall jetzt aus, so darf nicht jedes der vier Punktetripel

$$X_- Y_+ Z_+, \quad X_+ Y_- Z_+, \quad X_+ Y_+ Z_-, \quad X_- Y_- Z_-$$

auf einer Geraden liegen. Nehmen wir an, daß die Punkte $X_- Y_- Z_-$ nicht auf einer Geraden liegen, und betrachten wir die beiden Dreiecke

$$X_- Y_- Z_- \quad \text{und} \quad X_+ Y_+ Z_+.$$

(Daß X_+, Y_+, Z_+ nicht in einer Geraden liegen, folgt aus der kollinearen Abbildung des Heptaederdreiecks $X_+ Y_+ Z_+$.) Hier liegen die Schnittpunkte homologer Seiten

$$X_-^x = (Y_- Z_-, Y_+ Z_+), \quad Y_-^x = (Z_- X_-, Z_+ X_+), \quad Z_-^x = (X_- Y_-, X_+ Y_+)$$

in einer Geraden. Die Punkte X_-^x, Y_-^x, Z_-^x sind von den Punkten $X_- X_+ Y_- Y_+ Z_- Z_+$ verschieden. Denn es kann z. B., weil das Viereck $X_+ Y_+ X_- Y_-$ wie das zu ihm kollineare des Heptaeders konvex sein muß, der Punkt Z_-^x mit keinem der Punkte X_+, Y_+, X_-, Y_-, und weil Z_+ nicht auf der Geraden $X_+ Y_+$, Z_- nicht auf der Geraden $X_- Y_-$ liegt, auch nicht mit Z_+ oder Z_- zusammenfallen. Die Punkte X_-^x, Y_-^x, Z_-^x sind auch wegen der kollinearen Beziehung, wie die gleichbenannten beim Heptaeder, von einander verschieden. Die sechs Geraden $Y_+ Z_+$, $Z_+ X_+$, $X_+ Y_+$, $Y_- Z_-$, $Z_- X_-$, $X_- Y_-$ sind von einander verschieden; denn es kann z. B. keiner der beiden Punkte X_-, Y_- in die Gerade $X_+ Y_+$ fallen. Die sechs Geraden sind aber auch von der Geraden $X_-^x Y_-^x Z_-^x$ verschieden. Denn wäre etwa $X_+ Y_+ = X_-^x Y_-^x Z_-^x$, so müßte diese Gerade auch den auf $Y_+ X_-^x$ gelegenen Punkt Z_+ enthalten,

Flächen sein. Dieses Polyeder hat nun noch die Eigentümlichkeit, daß seine Punkte paarweise zusammenfallen. Aber dieser Umstand ist irrelevant, wenn nur der Typus des Polyeders ins Auge gefaßt, d. h. zwischen isomorphen Polyedern nicht unterschieden wird; denn unter den vielen isomorphen Polyedern wird es im allgemeinen gewiß solche geben, welche jene Eigentümlichkeit nicht haben.

Jedem einseitigen Polyedertypus entspricht ein bestimmter zweiseitiger. Im Falle des einseitigen Heptaeders muß sich die Doppelfläche aus sechs Vierecken und acht Dreiecken zusammensetzen, man erkennt in ihr leicht einen Typus, der durch ein sehr bekanntes halbreguläres Polyeder repräsentiert werden kann. Es ist das *Kubooktaeder*, welches man etwa aus dem Würfel erhalten kann, indem man seine Ecken bis zu den Mitten der von ihnen ausgehenden Kanten durch Ebenen abschneidet. — In den Figuren 1 und 5 sind Heptaeder und Kubooktaeder neben einander gestellt; von den

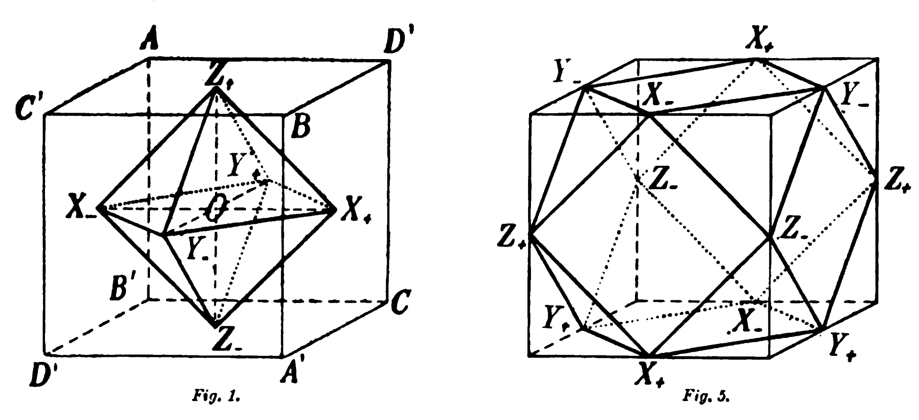


Fig. 1. *Fig. 5.*

Ecken des letzteren tragen je zwei gleiche Bezeichnung, dieselbe nämlich wie die ihnen isomorph zugeordnete des Heptaeders. Hiernach kann man sich durch Ablesen der Flächen davon überzeugen, daß in der Tat das Kubooktaeder zur Doppelfläche des Heptaeders isomorph ist. Es ist ferner das Heptaeder in seiner halbregulären Form und seine Kante gleich der des Kubooktaeders angenommen. Dadurch tritt noch die ganz besondere Eigentümlichkeit ein, daß die entsprechenden Flächen kongruent werden. *Man kann daher das Kubooktaeder, indem man es längs gewisser Kanten aufschneidet, in bestimmter Weise zusammenfaltet und endlich wieder in denselben Punkten zusammenheftet, die vorher durch den Schnitt getrennt wurden, zu der Doppelfläche eines Heptaeders umgestalten, ohne dabei Gestalt oder Größe der Einzelflächen zu ändern.* Bei dieser Umformung werden je zwei Punkte des

Kubooktaeders, welche auf demselben durch seinen Mittelpunkt M gezogenen Durchmesser liegen, zu demselben Punkte des Heptaeders zusammengelegt. Es entsteht so eine zwei-eindeutige und flächenweise kongruente Abbildung von Kubooktaeder und Heptaeder. Die beiden Kubooktaederpunkte, welche einem Heptaederpunkte entsprechen, liefern nun wiederum ein und dasselbe Bild, wenn das Kubooktaeder aus seinem Mittelpunkte M auf eine Ebene ε projiziert wird. Aus beiden Abbildungen resultiert eine ein-eindeutige zwischen Heptaeder und Ebene ε, welche, weil zusammengesetzt aus einer flächenweise kongruenten und einer flächenweise perspektiven, flächenweise kollinear sein muß. Ferner sieht man, daß die Kanten des Kubooktaeders sich zu vier regulären Sechsecken $X_- Y_+ Z_+ X_- Y_+ Z_+$, $X_+ Y_- Z_+ X_+ Y_- Z_+$, $X_+ Y_+ Z_- X_+ Y_+ Z_-$, $X_- Y_- Z_- X_- Y_- Z_-$ anordnen, deren Ebenen durch M gehen, daß also die vorliegende Abbildung des Kubooktaeders auf die Ebene ε eine durch vier Gerade bewirkte Gebietseinteilung liefert. Hiermit ist die Möglichkeit der flächenweise kollinearen Abbildung einer solchen Gebietseinteilung auf das einseitige Heptaeder wiederum dargetan.

Der eben behandelte Fall ist nicht der einzige, in welchem ein konvexes Kubooktaeder — so soll jetzt irgend ein mit dem sonst so genannten Polyeder isomorphes bezeichnet werden — und die Doppelfläche eines einseitigen Heptaeders flächenweise kongruent sind. Stellen wir uns in den Figuren 1 und 5 statt der beiden kongruenten Würfel kongruente Parallelepipeda mit lauter gleichen Kanten, also rhombischen Flächen vor und verstehen wir nach wie vor unter $X_- X_+ Y_- Y_+ Z_- Z_+$ in Fig. 1 die Flächen-, in Fig. 5 die Kantenmitten, so werden diese Figuren noch immer ein Heptaeder und ein Kubooktaeder mit kongruenten entsprechenden Flächen darstellen. Denn je zwei entsprechende Kanten sind gleich, nämlich halb so groß wie die zu ihnen parallele Flächendiagonale des Parallelepipeds, und die Vierecke sind Rechtecke. Geht man vom Heptaeder aus, so sieht man, daß die Doppelfläche eines beliebigen rechteckigen Heptaeders welches also aus einem Oktaeder mit Mittelpunkt und gleich langen unter beliebigen Winkeln sich schneidenden Diagonalen entstanden ist, die Umwandlung in ein Kubooktaeder gestattet. Beschränkt man sich auf solche Kubooktaeder, deren Ecken Kantenmitten eines Parallelepipeds sind, so sind hiermit alle Fälle erledigt, in denen die in Rede stehende Umwandlung möglich ist. Denn, wenn wir auch nur ein gewöhnliches Parallelepipedon voraussetzen, die Betrachtung eines von den Mitten vierer Parallelkanten

gebildeten Parallelogramms — und dieses ist zu zwei Parallelepipedflächen kongruent — läßt erkennen, daß wir es mit einem Rhombus zu tun haben, da bei der Umformung zum Doppelheptaeder alle vier Seiten mit einander zur Deckung kommen. Heben wir aber jene Beschränkung auf, so gibt es noch andere Fälle.

Um die Frage ganz allgemein zu erledigen, bemerken wir zunächst, *daß jedes konvexe Polyeder, welches der Doppelfläche eines einseitigen Polyeders flächenweise kongruent ist, notwendig einen Mittelpunkt besitzen muß.* Wenn wir nämlich die Doppelfläche in der Weise auf sich selbst abbilden, daß wir jedem Punkte den mit ihm zusammenfallenden zuordnen, so ist diese Abbildung eine flächenweise symmetrisch-kongruente. Daher ist auch das aus der Doppelfläche hervorgehende konvexe Polyeder zu sich selbst flächenweise symmetrisch-kongruent. Andererseits sind nach dem *Cauchy*schen Polyedersatz zwei isomorphe flächenweise kongruente bezw. symmetrisch-kongruente Polyeder auch als Ganzes kongruent bezw. symmetrisch-kongruent. Das von uns betrachtete konvexe Polyeder muß also durch eine symmetrische Operation in sich selbst übergeführt werden können. Diese symmetrische Operation vertauscht überdies die Polyederpunkte paarweise, ist also involutorisch. Nun gibt es aber nur zwei involutorische symmetrische Operationen: Spiegelung an einer Ebene und Spiegelung an einem Punkte (Inversion). Läge Spiegelung an einer Ebene vor, so müßte das Polyeder zu beiden Seiten der spiegelnden Ebene liegen, also von dieser geschnitten werden. Dann hätten wir aber auf dem Polyeder Punkte, die mit den ihnen entsprechenden zusammenfallen. Das wäre nur möglich, wenn das Polyeder sich selber schnitte, und dies ist durch die Konvexität ausgeschlossen. Es bleibt also nur Spiegelung an einem Punkte übrig, und dieser ist alsdann Mittelpunkt. — Nehmen wir nun an, es liege ein konvexes Kubooktaeder vor, welches sich in die Doppelfläche eines Heptaeders umwandeln läßt, bezeichnen wir mit M seinen Mittelpunkt, und behalten wir im übrigen die frühere Bezeichnung bei, so enthält dasselbe zwei Vierecke $\xi = Y_+ Z_+ Y_- Z_-$, zwei Vierecke $\eta = Z_+ X_+ Z_- X_-$ und zwei Vierecke $\zeta = X_+ Y_+ X_- Y_-$. Wir bezeichnen die Diagonalpunkte in diesen Vierecken bezw. durch O_ξ, O_η, O_ζ. Es sind dies im ganzen sechs Punkte, welche nach vollzogener Umwandlung in einen einzigen Punkt zusammenfallen. Da die Strecken $X_+ X_+$ und $X_- X_-$ in M halbiert werden, so sind $X_+ X_- X_+ X_-$ die Ecken eines Parallelogramms mit dem Mittelpunkt M. Auf den Seiten dieses Parallelogramms liegen die

vier Punkte $O_\eta O_\zeta O_\eta O_\zeta$, teilen wir in ihnen die Seiten, so erhalten wir acht Strecken, die zu je vier einander gleich sind. Es müssen nämlich die vier von den beiden Punkten X_+ ausgehenden Strecken einander gleich sein, weil sie sämtlich beim Doppelheptaeder mit einander zur Deckung kommen, und aus demselben Grunde folgt die Gleichheit der vier von den beiden Punkten X_- ausgehenden Strecken. Hieraus ergibt sich, daß $X_+X_-X_+X_-$ ein Rhombus, $O_\eta O_\zeta O_\eta O_\zeta$ ein Rechteck ist; der Rhombus ist dem Rechteck umbeschrieben, seine Ecken liegen in den Winkelhalbierenden der Rechtecksdiagonalen. Dieselben Schlüsse gelten für die Vierecke $Y_+Y_-Y_+Y_-$ und $O_\zeta O_\xi O_\zeta O_\xi$, $Z_+Z_-Z_+Z_-$ und $O_\xi O_\eta O_\xi O_\eta$, woraus sich auch ergibt, daß die Punkte O_ξ, O_η, O_ζ vom Mittelpunkt M gleichen Abstand haben müssen. Zu den bisher für das konvexe Kubooktaeder aus der Voraussetzung der Existenz eines flächenweise kongruenten Heptaeders abgeleiteten Bedingungen kommen nun noch solche, welche die Form von Ungleichungen haben und sich aus der Betrachtung der Winkel ergeben, welche in den Vierecken ξ, η, ζ von den Diagonalen gebildet werden. Setzen wir

$$(5.)\qquad \sphericalangle Y_+O_\xi Z_+ = x, \quad \sphericalangle Z_+O_\eta X_+ = y, \quad \sphericalangle X_+O_\zeta Y_+ = z,$$

so werden diese Winkel, wenn ein flächenweise kongruentes Heptaeder existiert, in diesem als die Seiten eines Dreikants auftreten; sie sind also den Ungleichungen unterworfen:

$$(6.)\qquad \begin{cases} x+y+z < 2\pi \\ y+z > x \\ z+x > y \\ x+y > z. \end{cases}$$

Wenn umgekehrt diese Ungleichungen und die vorher für das Kubooktaeder abgeleiteten Bedingungen erfüllt sind, so läßt es sich in die Doppelfläche eines Heptaeders verwandeln. Denn zunächst folgt aus dem Bestehen der Ungleichungen (6.), daß man ein Dreikant mit den Seiten x, y, z konstruieren kann. Trägt man sodann auf den Kanten desselben vom Scheitel O aus die in den Kubooktaedervierecken als Teile der Diagonalen auftretenden Stücke $O_\eta X_+ = O_\zeta X_+$, $O_\zeta Y_+ = O_\xi Y_+$, $O_\xi Z_+ = O_\eta Z_+$, auf den rückwärtigen Verlängerungen der Kanten die Strecken $O_\eta X_- = O_\zeta X_-$, $O_\zeta Y_- = O_\xi Y_-$, $O_\xi Z_- = O_\eta Z_-$ ab, und bezeichnet man die Endpunkte der Abtragungen

wiederum mit $X_+, Y_+, Z_+, X_-, Y_-, Z_-$, so ergibt sich sofort, daß das aus diesen Punkten als Ecken konstruierte einseitige Heptaeder mit den durch (1.) bezeichneten Flächen dem Kubooktaeder flächenweise kongruent ist. — Wir führen nun die Konstruktion eines Kubooktaeders der verlangten Art in folgender Weise aus. Um einen Punkt M beschreiben wir eine Kugel vom Radius r und ziehen drei nicht in einer Ebene gelegene Durchmesser $O_\xi O_\xi$, $O_\eta O_\eta$, $O_\zeta O_\zeta$. Wir bezeichnen mit ξ', η', ζ' die Ebenen der Rechtecke $O_\eta O_\zeta O_\eta O_\zeta$, $O_\zeta O_\xi O_\zeta O_\xi$, $O_\xi O_\eta O_\xi O_\eta$ oder auch diese Rechtecke selbst, mit x_+, x_-; y_+, y_-; z_+, z_- die Halbierungslinien der Winkel, welche die in ξ', η', ζ' liegenden Durchmesser mit einander bilden. Diese sechs Geraden liegen bekanntlich zu je dreien in vier Ebenen; bei der Wahl ihrer Bezeichnung ist darauf zu achten, daß das Tripel $x_- y_- z_-$ in einer Ebene liegt, dann gilt dasselbe auch für die Tripel $x_- y_+ z_+$, $x_+ y_- z_+$, $x_+ y_+ z_-$. Die bisher konstruierte Figur wollen wir als fest betrachten, nunmehr aber den festen Rechtecken ξ', η', ζ' bewegliche Rhomben $X_+ X_- X_+ X_-$, $Y_+ Y_- Y_+ Y_-$, $Z_+ Z_- Z_+ Z_-$ umbeschreiben, deren Ecken $X_+, X_-, Y_+, Y_-, Z_+, Z_-$ bezw. auf den Geraden $x_+, x_-, y_+, y_-, z_+, z_-$ gleiten. Als Anfangslage eines solchen Rhombus sei diejenige bezeichnet, bei welcher seine Seiten den Diagonalen des einbeschriebenen Rechtecks parallel also auch gleich $2r$ sind und durch die Ecken des Rechtecks halbiert werden. Halten wir die drei Rhomben in irgend einer ihrer Lagen fest, so bilden ihre Ecken die Ecken eines Kubooktaeders, dessen Flächen durch (1.) angegeben werden, und damit dasselbe in die Doppelfläche eines Heptaeders verwandelt werden könne, ist nur noch notwendig, daß die unter (5.) definierten Winkel den Ungleichungen (6.) genügen. Nehmen wir nun aber zunächst die Rhomben alle drei in ihrer Anfangslage an, so erkennt man sofort, daß das Kubooktaeder jene besondere Form hat, welche sich aus einem Parallelepipedon mit gleichen Kanten durch Abschneiden der Ecken bis zu den Kantenmitten ableiten läßt, man sieht auch sogleich, daß es dem aus den sechs Punkten $O_\xi, O_\xi, O_\eta, O_\eta, O_\zeta, O_\zeta$ als Ecken gebildeten einseitigen Heptaeder flächenweise kongruent ist. Bei der Anfangslage der Rhomben ist also das Kubooktaeder sicher konvex und es bestehen die Ungleichungen (6.). Läßt man jetzt die drei Rhomben sich (unabhängig von einander) bewegen, so werden sicherlich, so lange die Abweichungen von der Anfangslage unterhalb gewisser Grenzen bleiben, sowohl die Konvexität des Kubooktaeders als auch die Ungleichungen (6.) fortbestehen. So lange aber diese Ungleichungen be-

stehen, kann auch das Kubooktaeder in die Doppelfläche eines einseitigen Heptaeders verwandelt werden. Das allgemeinste Kubooktaeder der verlangten Art ist also von 7 Konstanten abhängig. — Unter den verschiedenen Lagen, welche die beweglichen Rhomben annehmen können, ist außer der Anfangslage noch diejenige bemerkenswert, bei welcher die Seiten der Rhomben auf den Diagonalen der Rechtecke senkrecht stehen und daher die Vierecksflächen des Kubooktaeders von der Kugel vom Radius r berührt werden. Es werden alsdann die Winkel x, y, z gleich den Winkeln zwischen den Flächen der aus den Kanten MO_ξ, MO_η, MO_ζ gebildeten Ecke, und die Ungleichungen (6.) werden also Ungleichungen zwischen diesen Winkeln. Es läßt sich ferner unschwer nachweisen, daß in dem hier betrachteten Falle diese Ungleichungen gleichzeitig die Bedingungen für die Konvexität des Kubooktaeders darstellen.

6. *Beziehungen zur elliptischen Geometrie.*

Im Vorhergehenden haben wir zwei ein-eindeutige Beziehungen betrachtet: eine solche zwischen dem Kubooktaeder und der Doppelfläche des einseitigen Heptaeders, welche flächenweise kongruent ist, und eine Beziehung zwischen dem einfachen Heptaeder und der durch ein vollständiges Vierseit eingeteilten Ebene. Die letztere ist flächenweise kollinear; es liegt die Frage nahe, ob nicht in besonderen Fällen die Kollineationen zu Kongruenzen werden können. Es kann dies in der Tat eintreten und zwar sowohl bei gewöhnlicher als auch bei elliptischer Maßbestimmung. Der letztere Fall ist besonders interessant und steht in enger Beziehung zu unseren letzten Untersuchungen. Wir wollen dies für einen besonderen Fall näher ausführen. Zunächst bemerken wir, daß die Betrachtungen des vorigen Paragraphen in der Hauptsache unverändert bleiben, wenn wir ihnen statt der gewöhnlichen eine elliptische oder hyperbolische Maßbestimmung zugrunde legen. Insbesondere gilt in allen drei Fällen: 1. Zieht man durch einen Punkt O drei Gerade unter rechten Winkeln, und beschreibt man um O eine Kugel vom Radius r, so schneidet diese die Geraden in 6 Punkten, welche die Ecken eines aus regulären Dreiecken und Vierecken zusammengesetzten einseitigen Heptaeders bilden. 2. Zieht man durch einen Punkt M drei Gerade unter rechten Winkeln, ferner diejenigen sechs Geraden, welche die von den drei ersten gebildeten Winkel halbieren, so werden diese Winkelhalbierenden von einer um M mit

dem Radius ϱ beschriebenen Kugel in 12 Punkten geschnitten, welche die Ecken eines aus regulären Dreiecken und Vierecken zusammengesetzten konvexen Kubooktaeders bilden. Von den 24 Kanten des Kubooktaeders werden vier reguläre Sechsecke gebildet, deren Ebenen durch M gehen. 3. Hat man sich für die Größe des Radius ϱ entschieden, so kann man den Radius r so wählen, daß das Kubooktaeder und die Doppelfläche des Heptaeders flächenweise kongruent werden. — Nehmen wir nun elliptische Maßbestimmung an, und bezeichnen wir mit π die Länge der ganzen Geraden. Lassen wir alsdann den Radius ϱ wachsen und mit ihm zugleich den Radius r in der Weise, daß die zugehörigen Polyeder — Kubooktaeder und Doppelheptaeder — stets flächenweise kongruent bleiben. In dem Augenblick, wo ϱ die Länge $\frac{\pi}{2}$ erreicht, stößt jeder Punkt der Kugel vom Radius ϱ mit dem entgegengesetzten Punkte zusammen, die Kugel degeneriert in eine Doppelebene. In dieselbe Doppelebene degeneriert auch das Kubooktaeder, indem die vier regulären Sechsecke in Doppelgerade übergehen. Zwei zusammenfallenden Punkten des Doppelheptaeders entsprechen wieder zwei zusammenfallende Punkte der Doppelebene, sodaß wir nun auch eine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem einfachen Heptaeder und der einfachen Ebene erhalten, welche flächenweise kongruent ist. Der Radius r der dem Heptaeder umbeschriebenen Kugel ist gleich der halben Diagonale in den Quadraten also, wie leicht zu sehen, gleich $\frac{\pi}{4}$.

Wird jetzt das Heptaeder, wie in § 1, längs des Kantenzuges $X_+ Y_- Z_+ X_- Y_+ Z_- X_+$ aufgeschnitten und in eine Ebene ausgebreitet, so werden sich die Schnittstellen wieder zusammenfügen, aus der Gesamtfläche wird eine Ebene. Wir wollen fernerhin dieses Heptaeder und alle, welche diese Eigenschaft mit ihm gemein haben, als „*abwickelbar*“ bezeichnen. Es ist jedoch wohl zu beachten, daß eine kontinuierliche Überführung eines Heptaeders in eine Ebene ohne Zerschneidung niemals möglich ist, auch wenn während der Bewegung Änderungen der Längen zulässig sind. Dies beruht darauf, daß schon unter den geschlossenen Linien des projektiven Raumes zwei wesentlich verschiedene Arten existieren: die Linien der ersteren Art (paare Züge) werden von jeder Ebene und überhaupt von jeder geschlossenen Fläche in einer geraden Anzahl von Punkten geschnitten, die Linien der zweiten Art (unpaare Züge) von jeder Ebene in einer ungeraden Anzahl von Punkten. Nur Linien derselben Art lassen sich kontinuierlich (ohne Zer-

schneiden) in einander überführen, und ebenso vermag eine Kollineation die Art einer Linie nicht zu ändern. Entsprechend hat man Flächen erster Art, welche nur geschlossene Linien der ersten Art, und Flächen zweiter Art, welche auch geschlossene Linien der zweiten Art enthalten, zu unterscheiden. Jede bei einer gewöhnlichen Maßbestimmung ganz im Endlichen liegende geschlossene Linie oder Fläche, daher auch jede zu einer solchen Linie oder Fläche kollineare ist von der ersten Art. Zwischen Heptaeder und Ebene besteht also der rein topologische Unterschied, daß das Heptaeder eine Fläche der ersten, die Ebene eine solche der zweiten Art ist.

Die Aufgabe, mit der wir uns hier beschäftigen wollen, ist die *Bestimmung aller abwickelbaren einseitigen Heptaeder bezw. aller Gebietseinteilungen einer Ebene, welche durch Abwickelung eines Heptaeders entstehen können.* Nach den Ausführungen in § 4 und in Anbetracht des Umstandes, daß Kongruenz nur ein spezieller Fall der Kollineation ist, ist klar, daß nur solche Gebietseinteilungen in Frage kommen können, welche durch ein vollständiges Vierseit hervorgebracht werden.

Wir behandeln die Aufgabe zunächst für die gewöhnliche Geometrie, behalten die früheren Bezeichnungen bei und nehmen an, es läge ein Heptaeder und eine ihm flächenweise kongruente Einteilung einer Ebene ε vor. Den in den Flächen ξ, η, ζ von ε liegenden Diagonalpunkten O_ξ, O_η, O_ζ entsprechen auf dem Heptaeder drei in einen Punkt O zusammenfallende Punkte. Wegen der Kongruenz der Abbildung müssen, je nachdem O ein endlicher oder unendlich ferner Punkt ist, die Punkte O_ξ, O_η, O_ζ entweder alle drei im Endlichen liegen oder alle drei unendlich fern sein. Letzteres ist aber ausgeschlossen, da O_ξ, O_η, O_ζ nicht in einer Geraden liegen können, und es sind also O_ξ, O_η, O_ζ endliche Punkte. Auf den Seiten des Diagonaldreiecks $O_\xi O_\eta O_\zeta$ liegen die Eckenpaare X_+, X_-; Y_+, Y_-; Z_+, Z_- des Vierseits so, daß sie durch die Ecken des Dreiecks harmonisch getrennt werden. Nehmen wir an, daß die auf den endlichen Seiten von $O_\xi O_\eta O_\zeta$ liegenden Vierseitsecken X_+, Y_+, Z_+ seien. Dann müssen die Gleichungen bestehen

$$O_\eta X_+ = O_\zeta X_+, \quad O_\zeta Y_+ = O_\xi Y_+, \quad O_\xi Z_+ = O_\eta Z_+,$$

weil diese in ε liegenden Streckenpaare bezw. gleich den Strecken OX_+, OY_+, OZ_+ der Heptaederfigur sein müssen. Es sind daher in ε die Punkte X_+, Y_+, Z_+ Seitenmitten des Dreiecks $O_\xi O_\eta O_\zeta$, woraus weiter folgt, daß X_-, Y_-, Z_- ins Unendliche fallen.

Wir können dieses Resultat auch auf Grund einer allgemeinen Überlegung herleiten. Nehmen wir an, es läge irgend eine polygonale Einteilung der Ebene ε vor, und es existiere ein Polyeder der ersten Art (welches also nur paare Züge enthält), welches der Einteilung von ε flächenweise kongruent ist, dann ist leicht zu sehen, daß die unendlich ferne Gerade von ε vollständig aus Kanten der polygonalen Einteilung zusammengesetzt sein muß. Andernfalls nämlich könnte man eine Gerade g in ε ziehen, deren unendlich ferner Punkt auf keiner Einteilungskante läge. Diese Gerade würde durch die Einteilung von ε in eine Anzahl von Strecken eingeteilt werden, und es würde ihr auf dem Polyeder ein geschlossener aus ebensovielen Strecken sich zusammensetzender Zug entsprechen. Dieser Zug würde wie g einen einzigen unendlich fernen Punkt enthalten, und dieser würde keine Ecke sein sondern im Innern einer Strecke liegen. Der geschlossene Zug wäre, weil er die unendlich ferne Ebene in einem Punkte schneidet, ein unpaarer, entgegen der über das Polyeder gemachten Voraussetzung. Diese Betrachtung, welche sich leicht nach verschiedenen Richtungen verallgemeinern läßt, zeigt auf unseren Fall angewandt, sofort, daß eine der Geraden des Vierseits die unendlich ferne sein muß, woraus dann wieder folgt, daß die von den drei andern gebildeten Ecken die Seitenmitten des Diagonaldreiecks $O_\xi O_\eta O_\zeta$ sein müssen.

Vergleichen wir weiter die ebene Figur mit dem Heptaeder, so sehen wir, daß die Winkel des endlichen Dreiecks $O_\xi O_\eta O_\zeta$ in ε in der Heptaederfigur als Seiten eines Dreikants erscheinen. Sie sind daher der Bedingung unterworfen, daß die Summe zweier von ihnen größer als der dritte ist, mit andern Worten, sie müssen spitz sein. Da diese Winkel mit denen des Dreiecks $X_+ Y_+ Z_+$ übereinstimmen, so haben wir den Satz:

Damit bei gewöhnlicher Maßbestimmung eine Vierseitseinteilung die Abwickelung eines Heptaeders darstellen könne, muß notwendig eine Gerade des Vierseits die unendlich ferne und das von den drei andern gebildete endliche Dreieck spitzwinklig sein.

Aber diese Bedingungen sind auch hinreichend. Denn sind sie erfüllt, so kann man zunächst eine dreiseitige Ecke konstruieren, welche die Winkel des Dreiecks $X_+ Y_+ Z_+$ zu Seiten hat. Macht man alsdann die Kanten der Ecke entsprechend gleich den Dreiecksseiten, bezeichnet mit X_+, Y_+, Z_+ ihre Endpunkte, verlängert sie rückwärts über den Scheitel O ins Unendliche und bezeichnet mit X_-, Y_-, Z_- ihre unendlich fernen Punkte, so ist sofort zu sehen, daß die Flächen des aus den letztgenannten Punkten als Ecken

konstruierten Heptaeders den gleichbezeichneten der Vierseitseinteilung kongruent sind.

Ganz ähnlich gestaltet sich die Untersuchung, wenn wir statt der gewöhnlichen Maßbestimmung eine elliptische zugrunde legen. Nehmen wir alsdann wieder an, es läge die ebene Abwickelung eines Heptaeders vor. Dann müssen zwischen den in dieser auftretenden Strecken, wie die Vergleichung beider Figuren lehrt, die Gleichungen bestehen:

$$(7.)\quad \begin{cases} O_\eta X_+ = O_\zeta X_+, \; O_\zeta Y_+ = O_\xi Y_+, \; O_\xi Z_+ = O_\eta Z_+, \\ O_\eta X_- = O_\zeta X_-, \; O_\zeta Y_- = O_\xi Y_-, \; O_\xi Z_- = O_\eta Z_-. \end{cases}$$

Ferner müssen die durch (5.) angegebenen Winkel x, y, z, da sie beim Heptaeder als Seiten eines Dreikants auftreten, den Ungleichungen (6.) genügen. Sind andererseits diese Bedingungen erfüllt, so kann man zunächst ein Dreikant mit den Seiten x, y, z konstruieren. Wenn man sodann auf dessen Kanten und ihren rückwärtigen Verlängerungen die unter (7.) bezeichneten Strecken entsprechend abträgt, so gelangt man zu den Ecken eines mit der Vierseitseinteilung flächenweise kongruenten Heptaeders.

Den Bedingungen (6.) können wir eine mehr symmetrische Form geben, indem wir die Nebenwinkel x', y', z' von x, y, z einführen. Sie lauten alsdann:

$$(6^a.)\quad \begin{cases} x + y + z < 2\pi \\ x + y' + z' < 2\pi \\ x' + y + z' < 2\pi \\ x' + y' + z < 2\pi \end{cases}$$

und besagen, daß in jedem der vier Dreiecke, in welche die Ebene durch die drei Geraden $O_\eta O_\zeta$, $O_\zeta O_\xi$, $O_\xi O_\eta$ eingeteilt wird, die Winkelsumme $< 2\pi$, also der sphärische Exzeß $< \pi$ sein muß. Da nun der Inhalt der ganzen Ebene $= 2\pi$, der Inhalt eines Dreiecks gleich seinem sphärischen Exzeß ist, so besagen jene Bedingungen, daß ein jedes der vier Dreiecke inhaltlich kleiner als die halbe Ebene sein muß. Werden also O_ξ, O_η, O_ζ nur diesen Ungleichungen gemäß, sonst willkürlich gewählt, so bilden die Seitenmitten der zugehörigen vier Dreiecke die Ecken eines vollständigen Vierseits, welches die Abwickelungsfigur eines Heptaeders darstellt; und man hat so ein Vierseit der verlangten Art in allgemeinster Weise konstruiert. Nimmt man insbesondere die Ecken O_ξ, O_η, O_ζ in den Abständen $\frac{\pi}{2}$ von einander an,

so werden die zugehörigen Dreiecke regulär und kongruent, ihre Winkel rechte, das aus ihren Seitenmitten als Ecken konstruierte vollständige Vierseit gibt eine Einteilung in reguläre Dreiecke und Vierecke. Wir haben also den besonderen Fall, den wir im Anfange dieses Paragraphen als Grenzfall aus einem Kubooktaeder hergeleitet haben. Es ist aber leicht zu sehen, daß man auch die allgemeine Lösung der hier behandelten Aufgabe in der gleichen Weise als Grenzfall eines mit der Doppelfläche eines Heptaeders flächenweise kongruenten Kubooktaeders herleiten kann, am einfachsten, indem man von denjenigen Kubooktaedern ausgeht, die ganz am Ende von § 5 erwähnt wurden.

Wir wollen noch eine andere Lösung unserer Aufgabe mitteilen, bei welcher die für die Konstruktion lästigen Nebenbedingungen vermieden werden. In § 4 wurde gezeigt, daß es nur auf eine Art möglich ist, das einseitige Heptaeder auf die Vierseitseinteilung einer Ebene ε flächenweise kollinear abzubilden, und daß, wenn die 7 Kollineationen über die begrenzten Flächen hinaus in die unbegrenzten Ebenen fortgesetzt werden, die 7 unter (4.) angegebenen Vierseite in das Vierseit in ε übergehen. Hier haben wir es nun mit dem Fall zu tun, wo diese Kollineationen, so weit sie sich auf die begrenzten Heptaederflächen beziehen, Kongruenzen sind. Dann sind sie es aber auch in ihrem ganzen Umfange, und wir haben den Satz:

Wenn das einseitige Heptaeder abwickelbar ist, so sind die unter (4.) angegebenen Vierseite, welche die negativen Oktaederebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ aus den Heptaederebenen ausschneiden, dem bei der Abwickelung sich ergebenden Vierseite kongruent.

Aus der Kongruenz folgt die Gleichheit derjenigen in den Vierseiten auftretenden Kanten, welche nach Unterdrückung des Index ∞ gleiche Bezeichnung tragen, also

$$Y_+ Z_+ = Y_+^\infty Z_+ = Y_+ Z_+^\infty = Y_+^\infty Z_+^\infty, \text{ usw.},$$

hieraus wieder ergibt sich, daß auch das auf ε^∞ durch $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ ausgeschnittene Vierseit $X_-^\infty Y_+^\infty Z_+^\infty$, $X_+^\infty Y_-^\infty Z_+^\infty$, $X_+^\infty Y_+^\infty Z_-^\infty$, $X_-^\infty Y_-^\infty Z_-^\infty$ den übrigen genannten kongruent ist. — Betrachten wir nun die in den Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ liegenden vollständigen Vierseite

$$(8.)\quad \begin{cases} (\alpha') & X_-^\infty Y_+ Z_+,\ X_- Y_+^\infty Z_+,\ X_- Y_+ Z_+^\infty,\ X_-^\infty Y_+^\infty Z_+^\infty; \\ (\beta') & X_+^\infty Y_- Z_+,\ X_+ Y_-^\infty Z_+,\ X_+ Y_- Z_+^\infty,\ X_+^\infty Y_-^\infty Z_+^\infty; \end{cases}$$

$$(8.)\quad \begin{cases} (\gamma') & X_+^\infty Y_+ Z_-,\ X_+ Y_+^\infty Z_-,\ X_+ Y_+ Z_-^\infty,\ X_+^\infty Y_+^\infty Z_-^\infty; \\ (\delta') & X_-^\infty Y_- Z_-,\ X_- Y_-^\infty Z_-,\ X_- Y_- Z_-^\infty,\ X_-^\infty Y_-^\infty Z_-^\infty. \end{cases}$$

Die in diesen vorkommenden Diagonalen

$$X_- X_-^\infty,\ X_+ X_+^\infty,\ Y_- Y_-^\infty,\ Y_+ Y_+^\infty,\ Z_- Z_-^\infty,\ Z_+ Z_+^\infty$$

sind identisch mit den Schnittgeraden

$$(\alpha', \delta'),\ (\beta', \gamma'),\ (\beta', \delta'),\ (\gamma', \alpha'),\ (\gamma', \delta'),\ (\alpha', \beta'),$$

die Diagonalpunkte sind daher die Ecken des Tetraeders $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, und es werden also die Punktepaare $X_- X_-^\infty$, $X_+ X_+^\infty$, $Y_- Y_-^\infty$, $Y_+ Y_+^\infty$, $Z_- Z_-^\infty$, $Z_+ Z_+^\infty$ durch die Ecken des Tetraeders harmonisch getrennt. Dies gilt für jedes Heptaeder. In dem jetzt betrachteten Falle zeigt es sich aber, daß in jedem der bei den Vierseiten (8.) auftretenden einfachen Vierecke z. B. $X_+^\infty Y_- X_+ Y_-^\infty$ je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind, woraus mittels Dreieckskongruenzen folgt, daß die Diagonalen einander halbieren. Der Schnittpunkt ist aber, wie wir sahen, eine Ecke des Tetraeders $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Betrachten wir daher eine der Diagonalen z. B. $X_+ X_+^\infty$, so sehen wir, daß die beiden auf ihr gelegenen Tetraederecken die Mittelpunkte der beiden Verbindungsstrecken von X_+ mit X_+^∞ sind. Die beiden Verbindungsstrecken der betrachteten Tetraederecken sind mithin einander gleich, also gleich der Hälfte der ganzen Geraden d. i. $= \frac{\pi}{2}$. Da dies für jedes Eckenpaar des Tetraeders $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ gelten muß, haben wir den Satz:

Soll das einseitige Heptaeder abwickelbar sein, so müssen die Ecken des zugehörigen Tetraeders der negativen Oktaederflächen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ die Abstände $\frac{\pi}{2}$ von einander haben.

Wir wollen zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, daß also die Abwickelbarkeit des Heptaeders lediglich von der Beschaffenheit des Tetraeders $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ abhängt. Um dies in übersichtlicher Weise darzutun, gehen wir von der Konstruktion eines beliebigen einseitigen Heptaeders aus. Wir können dieselbe leisten, indem wir die mit dem Heptaeder verbundenen Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon^\infty$ als Ebenen in allgemeiner Lage, sonst willkürlich annehmen. Als Schnitte der Ebene ε^∞ mit den Kanten (α', δ'), (β', γ'), (β', δ'), (γ', α'), (γ', δ'), (α', β') des Tetraeders $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ erhalten wir sodann die Punkte $X_-^\infty, X_+^\infty, Y_-^\infty, Y_+^\infty, Z_-^\infty, Z_+^\infty$ und endlich die Ecken $X_-, X_+, Y_-, Y_+, Z_-, Z_+$ des Heptaeders als diejenigen Punkte derselben Kanten, welche von den erstgenannten Punkten durch die Tetraederecken harmonisch getrennt

werden. — Es wird ferner der Raum durch die vier Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ in 8 Gebiete, begrenzte Tetraeder, eingeteilt, und jede fünfte Ebene von allgemeiner Lage dringt, wie die auf ihr ausgeschnittene Vierseitseinteilung zeigt, in 7 dieser Gebiete ein, in das achte nicht. So auch die Ebene ε^∞, und man erkennt leicht z. B. an dem speziellen Fall in § 1, wo ε^∞ die unendlich ferne Ebene ist und das Heptaeder innerhalb des endlichen Tetraeders $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ liegt, daß in jedem Falle das Heptaeder in demjenigen von den 8 Gebieten vollständig enthalten ist, in welches die Ebene ε^∞ nicht eindringt.

Wenn nun die Abstände der Ecken von $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ gleich $\frac{\pi}{2}$ sind, so sind die 8 in Rede stehenden Tetraeder regulär und unter einander kongruent, die in ihren Flächen auftretenden Winkel sämtlich rechte, die Schnittgerade zweier der Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ steht senkrecht auf den beiden andern, und zwei auf ihr gelegene Punkte sind dann durch die auf ihr liegenden Ecken harmonisch getrennt, wenn diese die Mitten der Verbindungsstrecken jener Punkte sind. Zwei solche Punkte sind daher Spiegelbilder zu einander bezüglich jeder der beiden Tetraederebenen, welche nicht durch sie hindurchgehen, während bezüglich der beiden andern jeder natürlich sein eigenes Spiegelbild ist. Wenden wir dies auf die Punktepaare $X_- X_-^\infty$, $X_+ X_+^\infty$, $Y_- Y_-^\infty$, $Y_+ Y_+^\infty$, $Z_- Z_-^\infty$, $Z_+ Z_+^\infty$ an, so erkennen wir, daß die in $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta, \zeta, \varepsilon^\infty$ enthaltenen, durch $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ ausgeschnittenen Vierseite durch Spiegelung an diesen vier Ebenen nur unter einander vertauscht werden, und zwar ist jede der vier Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ das Spiegelbild jeder der vier Ebenen $\xi, \eta, \zeta, \varepsilon^\infty$ bezüglich einer der vier Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Aus alledem folgt, daß die 8 Vierseite einander kongruent sind und ebenso also diejenigen einfachen Vierecke und Dreiecke, welche nach Unterdrückung des Index ∞ gleiche Bezeichnung haben. Mithin ist auch das Heptaeder mit den Flächen (1.) zu der Einteilung von ε^∞ flächenweise kongruent.

Hiernach gelangen wir zu der folgenden allgemeinen Konstruktion: Man nehme vier Punkte A', B', C', D' in den Abständen $\frac{\pi}{2}$ von einander an und eine Ebene ε', welche durch keinen von ihnen hindurchgeht, sonst aber ganz beliebig ist. Durch die Ebenen $\alpha' = B'C'D'$, $\beta' = C'D'A'$, $\gamma' = D'A'B'$, $\delta' = A'B'C'$ wird der Raum in 8 Tetraeder eingeteilt, in deren eines — es heiße T — die Ebene ε' nicht eintritt. Durch wiederholte Spiegelung von ε' an den Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ entstehen 7 weitere Ebenen; die in T gelegenen Teile derselben bilden ein einseitiges abwickelbares Heptaeder, für welches

$\varepsilon^x = \varepsilon'$ wird, und die Abwickelung ergibt die Vierseitseinteilung, welche sowohl in ε' als auch in den Heptaederebenen auftritt.

Natürlich erhalten wir in jedem der 8 von α', β', γ', δ' gebildeten Tetraeder durch Zusammenfassen der darin enthaltenen Teile der Ebene ε und ihrer Spiegelbilder ein abwickelbares Heptaeder; alle diese Heptaeder gehen durch die Spiegelungen in einander über und die zugehörigen Ebenen ε^x sind die 8 Ebenen, aus deren Teilen sie sich zusammensetzen.

Allgemein gehen durch Spiegelungen eines beliebigen Punktes an den Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ insgesamt 8 Punkte hervor, welche sich auf die 8 von diesen gebildeten Tetraeder verteilen. Bezeichnen wir wieder mit T eines dieser Tetraeder und bilden wir den ganzen Raum acht-eindeutig auf T ab, indem wir jedem Punkte denjenigen seiner Spiegelpunkte zuordnen, welcher in T liegt, so wird eine Gerade, da sie durch die Schnittpunkte mit $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ in vier Abschnitte zerfällt, in T einen aus vier Strecken bestehenden geschlossenen Zug als Bild liefern. Es ist klar, daß dieser Zug den Weg eines Lichtstrahls bezeichnet, der sich innerhalb T bewegt und an den Grenzflächen von T reflektiert wird. Lassen wir von einem Punkte innerhalb T ein ebenes Lichtstrahlenbüschel ausgehen, so werden die Strahlen in ihrem gesamten Verlauf eine Fläche erfüllen, welche als Abbildung einer Ebene des Raumes ein einseitiges abwickelbares Heptaeder darstellt. Haben wir ferner im Raume irgend eine zusammenhängende Fläche F, so ist ihr Bild Φ in T ebenfalls zusammenhängend, die einzelnen Teile von Φ sind zu den entsprechenden von F kongruent bezw. symmetrisch. Auf der Fläche Φ sind, wie überhaupt in T nur paare Linienzüge möglich.

Alle diese Betrachtungen sind mit ganz geringfügigen Modifikationen auch auf den Fall der gewöhnlichen Maßbestimmung anwendbar. Insbesondere ergibt sich auch hier, daß die Abwickelbarkeit des Heptaeders nur von den zugehörigen negativen Oktaederebenen abhängt. Von diesen müssen drei auf einander senkrecht stehen, die vierte muß ins Unendliche fallen. Nimmt man also drei zu einander senkrechte Ebenen α', β', γ' an, ferner eine Ebene ε', welche weder durch den Schnittpunkt von α', β', γ' geht, noch zu einer der Schnittgeraden parallel ist, und faßt man alle diejenigen Teile von ε' und den aus ε' durch (wiederholte) Spiegelungen an α', β', γ' hervorgehenden Ebenen, welche in einen und denselben Oktanten fallen, zusammen, so hat man damit auf allgemeinste Weise ein abwickelbares einseitiges Heptaeder konstruiert.

Inhaltsverzeichnis der Bände 121—130.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES

SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

DE **ÉMILE BOREL**

Maître de Conférences à l'École Normale Supérieure.

Volumes grands in-8 (25×16) se vendant séparément.

Leçons sur la théorie des fonctions. Eléments de la théorie des ensembles et applications; par ÉMILE BOREL; 1898 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions entières; par ÉMILE BOREL; 1900 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries divergentes; par ÉMILE BOREL; 1901 4 fr. 50 c.

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL; recueillies et rédigées par Robert d'Adhémar; 1902 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL; recueillies et rédigées par Ludovic Zoretti; 1903 3 fr. 50 c.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France, par HENRI LEBESGUE; 1904 ..... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'École Normale Supérieure par ÉMILE BOREL et rédigées par Maurice Fréchet, avec des Notes par Paul Painlevé et Henri Lebesgue; 1905 .... 4 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France par RENÉ BAIRE, rédigées par A. Denjoy; 1905 .... 3 fr. 50 c.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions; par ERNST LINDELOF .... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries trigonométriques; par HENRI LEBESGUE *(Sous presse.)*

Leçons sur la fonction $\zeta(\varrho)$ de Riemann et son application à la théorie des nombres premiers; par HELGE VON KOCH.

Principes de la théorie des fonctions entières de genre infini; par OTTO BLUMENTHAL .... *(En préparation.)*

L'inversion des intégrales définies; par M. VITO VOLTERRA. *(En prép.)*

Quelques principes fondamentaux de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes; par PIERRE COUSIN. *(En preparation.)*

Leçons sur les correspondances entre variables réelles; par JULES DRACH .... *(En préparation.)*

Leçons sur les séries de polynomes à une variable; par ÉMILE BOREL .... *(En préparation.)*





